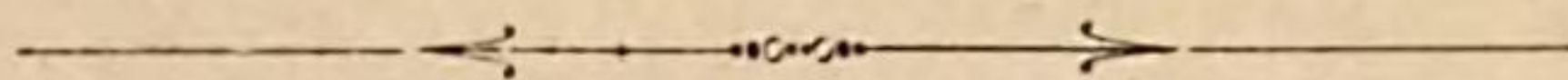


Untersuchungen
über
den Brocard'schen Kreis
und das
verallgemeinerte
Brocard'sche Dreieck

von
Andreas Müller
k. Gymnasialprofessor.



Bes. Abdruck aus dem Archiv der Mathematik und Physik
von Heppé (Grunert) 2. Reihe T. VIII und IX.



Von der naturwissenschaftlichen Facultät der Universität Tübingen als
Inauguraldissertation angenommen den 29. Dez. 1890.

Ueber den Brocard'schen Kreis als geometrischen Ort und die demselben verwandten Kegelschnittschaaren.

Von

Andr. Müller.

Die Sätze, welche hier erörtert werden sollen, wurden unter Anwendung barycentrischer Coordinaten gewonnen. Es möge deshalb gestattet sein, auch hier dieses Coordinatensystem, das sich für die vorliegende Frage als ganz besonders geeignet erweist, beizubehalten. Zu diesem Zwecke möge zunächst daran erinnert werden, dass die Lage eines Punktes M in Bezug auf drei feste Punkte A , B , C (Fundamentaldreieck) ausgedrückt wird durch die Gleichung:

$$M = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}$$

oder

$$M \equiv aA + bB + cC$$

wenn a , b und c die Gewichte darstellen, welche man sich in den Punkten A , B und C zu denken hat, damit M den Schwerpunkt jener drei mit den bezüglichen Gewichten belasteten Punkte darstelle ¹⁾.

1) Möbius: Der barycentrische Calcul. 1. Abschn. 2. Cap. S. 10. u. ff.
Bellavitis: Sposizione dei nuovi metodi di geometria analitica IV 92 pag. 44.

Denkt man sich ferner den Punkt M mit den Ecken des Fundamentaldreiecks ABC verbunden und diese Geraden bis zum Schnitt mit den Seiten BC in A' , CA in B' , AB in C' verlängert, so verhalten sich auch

$$a : b : c = \frac{A'M}{A'A} : \frac{B'M}{B'B} : \frac{C'M}{C'C}$$

oder auch

$$a : b : c = \triangle BMC : \triangle CMA : \triangle AMB$$

Ferner mögen hier im voraus die im folgenden zur Verwendung gelangenden Formeln zusammengestellt werden. Betrachten wir nämlich zwei Punkte M_1 und M_2 , deren Coordinaten beziehungsweise a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 seien, so müssen die Coordinaten eines dritten Punktes x_1, x_2, x_3 auf der Verbindungslinie derselben die Bedingung erfüllen:

$$1) \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Bezeichnen wir in der Entwicklung dieser Determinante die mit x_1 multiplicirte Unterdeterminante mit α_{12} , die mit x_2 multiplicirte mit β_{12} , die mit x_3 multiplicirte mit γ_{12} und ebenso in einer zweiten und dritten Determinante, welche die durch die Punkte 3, 4, beziehungsweise 5, 6 gehenden Geraden darstellen, die betr. Unterdeterminanten mit α_{34} etc., α_{56} etc., so sind die Schnittpunkt-Coordinaten der beiden ersten Geraden bestimmt durch die Gleichung:

$$2) \quad x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} \beta_{12} & \gamma_{12} \\ \beta_{34} & \gamma_{34} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \gamma_{12} & \alpha_{12} \\ \gamma_{34} & \alpha_{34} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{12} \\ \alpha_{34} & \beta_{34} \end{vmatrix}$$

die Bedingung aber, dass die drei Geraden durch denselben Punkt gehen, ist:

$$3) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{12} & \gamma_{12} \\ \alpha_{34} & \beta_{34} & \gamma_{34} \\ \alpha_{56} & \beta_{56} & \gamma_{56} \end{vmatrix} = 0$$

Bezeichnet man ferner die Länge der Strecken BC, CA, AB bezüglich mit a, b, c , so ist ein Punkt M_1 mit den Coordinaten x_1, x_2, x_3 auf der dem Dreieck umschriebenen Kreisperipherie gebunden an den Ausdruck

$$M_1 \equiv \frac{Aa}{x_1} + \frac{Bb}{x_2} + \frac{Cc}{x_3}$$

1) Die Ableitung der Formeln 1–4 siehe im Programm des kgl. Gymnasiums zu Kempten v. J. 1889.

und die Gleichung, welche die Coordinaten eines Punktes, der auf der Kreisperipherie liegen soll, erfüllen müssen, ist:

$$4) \quad \frac{a^2}{x_1} + \frac{b^2}{x_2} + \frac{c^2}{x_3} = 0$$

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wenden wir uns der besonderen, in der Ueberschrift bezeichneten Aufgabe zu.

I.

Das Dreieck, an welches die Untersuchung geknüpft werden soll, und das zugleich als Fundamentaldreieck dient, sei $ABC^1)$, die Segmentärpunkte seien O_2 und O_2' , die Schnittpunkte von BO_2 und CO_2' , dann von CO_2 mit AO_2' , endlich von AO_2 mit BO_2' seien bezüglich $A_2B_2C_2$; dann sind zunächst die Punkte O_2 und O_2' barycentrisch ausgedrückt durch

$$O_2 \equiv \frac{1}{b^2}A + \frac{1}{c^2}B + \frac{1}{a^2}C$$

und

$$O_2' \equiv \frac{1}{c^2}A + \frac{1}{a^2}B + \frac{1}{b^2}C$$

Die Coordinaten des ersten Ausdruckes ergeben sich leicht durch eine elementare Betrachtung. Verbindet man nämlich die Ecken A, B, C mit O_2 und verlängert die Verbindungslinien bis zum Schnitt mit den gegenüber stehenden Seiten in $A_\alpha, B_\beta, C_\gamma$, so findet sich

$$\frac{A_\alpha O_2}{A_\alpha A} = \frac{1}{b^2}; \quad \frac{B_\beta O_2}{B_\beta B} = \frac{1}{c^2} \quad \text{und} \quad \frac{C_\gamma O_2}{C_\gamma C} = \frac{1}{a^2}$$

Die Coordinaten von O_2' ergeben sich ebenso, oder noch einfacher unter Beachtung des Umstandes, dass O_2' der Winkelgegenpunkt von O_2 ist. Aus diesen Coordinaten lassen sich nun die der übrigen in Betracht kommenden Punkte berechnen, wenn man im besonderen Fall nicht etwa anderweitige Erwägungen anstellen will. Für A_2 den Schnittpunkt von BO_2 mit CO_2' sei diese Rechnung hier ausgeführt.

B hat die Coordinaten:

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = 0$$

1) S. den Art.: „Der Brocard'sche Winkel“ von W. Fuhrmann im 6. T. der 2. R. dieser Zeitschrift und die demselben beigegebene Figur.

O_2 die Coordinaten:

$$a_2 = \frac{1}{b^2}, \quad b_2 = \frac{1}{c^2}, \quad c_2 = \frac{1}{a^2}$$

ferner C :

$$a_3 = 0, \quad b_3 = 0, \quad c_3 = 1$$

endlich O_2' :

$$a_4 = \frac{1}{c^2}, \quad b_4 = \frac{1}{a^2}, \quad c_4 = \frac{1}{b^2}$$

Also wird nach 2):

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{b^2 c^2} : \frac{1}{a^2 b^2} : \frac{1}{a^2 c^2}$$

oder

$$x_1 : x_2 : x_3 = a^2 : c^2 : b^2$$

Ebenso findet man für B_2 :

$$x_1 : x_2 : x_3 = c^2 : b^2 : a^2$$

und für C_2 :

$$x_1 : x_2 : x_3 = b^2 : a^2 : c^2$$

Die Anwendung der Formel 3) ergibt nun zunächst folgenden Satz:

Verbindet man homologe Punkte auf den Seiten des Fundamentaldreiecks BC , CA , AB bzhw. mit den Punkten A_2 , B_2 , C_2 , so schneiden sich immer je drei derselben in dem nämlichen Punkte.

Unter homologen Punkten sind solche zu verstehen, welche man erhält, wenn man die drei Seiten des Dreiecks der Folge nach im nämlichen Verhältnisse teilt. Teilt nämlich P_α die Seite BC im Verhältniss von $m:n$, so sind die Coordinaten dieses Punktes

$$a_1 = 0, \quad b_1 = n, \quad c_1 = m$$

teilt P_β die Seite CA im Verhältniss $m:n$, so sind dessen Coordinaten:

$$a_3 = m, \quad b_3 = 0, \quad c_3 = n$$

endlich sind die Coordinaten von P_γ :

$$a_5 = n, \quad b_5 = m, \quad c_5 = 0$$

Die Coordinaten von A_2 , B_2 , C_2 aber sind:

$$a_2 = a^2, \quad b_2 = c^2, \quad c_2 = b^2$$

$$a_4 = c^2, \quad b_4 = b^2, \quad c_4 = a^2$$

$$a_6 = b^2, \quad b_6 = a^2, \quad c_6 = c^2$$

Die Determinante 3) erhält also unter Einführung dieser Werte folgende Form:

$$\Theta = \begin{vmatrix} nb^2 - mc^2, & ma^2, & -na^2 \\ -nb^2, & nc^2 - ma^2, & mb^2 \\ mc^2, & -nc^2, & na^2 - mb^2 \end{vmatrix}$$

Man ersieht aber sofort, wenn man sich die Glieder der einzelnen Columnen addirt denkt, dass $\Theta = 0$ ist.

II.

Diese Schnittpunkte nun liegen sämtlich auf dem Brocard'schen Kreise, daher der weitere Satz:

Der Brocard'sche Kreis ist der geometrische Ort der Schnittpunkte von je drei Geraden, welche man erhält, wenn man homologe Punkte auf den Seiten BC , CA , AB des Dreiecks bzhw. mit den Punkten A_2 , B_2 , C_2 verbindet.

Um den Nachweis dieses Satzes zu liefern, müssen wir zuvor eine Coordinatentransformation ausführen. Die Formel 4) gilt nämlich für die Coordinaten eines Punktes, welcher auf dem Kreise liegt, der dem Fundamentaldreieck umbeschrieben ist. Es muss also $\triangle A_2 B_2 C_2$, um welches bekanntlich der Brocard'sche Kreis beschrieben ist, als Fundamentaldreieck betrachtet werden. Das Verhältniss der Grössen a^2 , b^2 , c^2 in 4) ändert sich dabei nicht, da, (wie sich auch barycentrisch zeigen lässt)

$$\triangle A_2 B_2 C_2 \sim \triangle ABC \text{ ist.}$$

Um aber die Coordinaten irgend eines Punktes auf $A_2 B_2 C_2$ zu beziehen, erinnern wir uns, dass

$$A_2 = \frac{a^2 A + c^2 B + b^2 C}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$B_2 = \frac{c^2 A + b^2 B + a^2 C}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$C_2 = \frac{b^2 A + a^2 B + c^2 C}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Bezeichnen wir nun $a^2 + b^2 + c^2$ mit Σ und setzen die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2, & c^2, & b^2 \\ c^2, & b^2, & a^2 \\ b^2, & a^2, & c^2 \end{vmatrix} = a^2 \alpha + c^2 \beta + b^2 \gamma$$

so ist

$$A = \frac{\Sigma}{\Delta} (\alpha A_2 + \beta B_2 + \gamma C_2)$$

$$B = \frac{\Sigma}{\Delta} (\beta A_2 + \gamma B_2 + \alpha C_2)$$

$$C = \frac{\Sigma}{\Delta} (\gamma A_2 + \alpha B_2 + \beta C_2)$$

Ein Punkt P_α also, welcher BC im Verhältniss von $n:m$ teilt, hat, bezogen auf das Dreieck $A_2 B_2 C_2$, den Ausdruck:

$$P_\alpha \equiv (m\beta + n\gamma)A_2 + (m\gamma + n\alpha)B_2 + (m\alpha + n\beta)C_2$$

Der homologe Punkt P_β auf CA ist ausgedrückt durch

$$P_\beta \equiv (m\gamma + n\alpha)A_2 + (m\alpha + n\beta)B_2 + (m\beta + n\gamma)C_2$$

Endlich ist

$$P_\gamma \equiv (m\alpha + n\beta)A_2 + (m\beta + n\gamma)B_2 + (m\gamma + n\alpha)C_2$$

Verbindet man nun P_α mit A_2 , so hat man in Formel 1):

$$\begin{aligned} a_1 &= m\beta + n\gamma; & b_1 &= m\gamma + n\alpha; & c_1 &= m\alpha + n\beta \\ a_2 &= 1; & b_2 &= 0; & c_2 &= 0 \end{aligned}$$

und irgend ein Punkt auf dieser Geraden genügt also der Gleichung:

$$x_2(m\alpha + n\beta) - x_3(m\gamma + n\alpha) = 0$$

Ebenso genügt ein Punkt auf der Geraden $P_\beta B_2$ der Gleichung:

$$x_1(m\beta + n\gamma) - x_3(m\gamma + n\alpha) = 0$$

Endlich gilt für $P_\gamma C_2$ die Gleichung:

$$(m\beta + n\gamma)x_1 - (m\alpha + n\beta)x_2 = 0$$

Die Coordinaten des Schnittpunktes je zweier dieser Geraden genügen den beiden betr. Gleichungen. Da sie aber dann auch der dritten Gleichung genügen, so ersieht man auch hieraus, dass die drei Geraden durch denselben Punkt gehen. Für diesen Schnittpunkt ist also:

$$x_1(m\beta + n\gamma) = x_2(m\alpha + n\beta) = x_3(m\gamma + n\alpha)$$

Soll dieser Punkt auch auf dem um $A_2 B_2 C_2$ beschriebenen Kreise liegen, so müssen seine Coordinaten der Gleichung genügen:

$$\frac{a^2}{x_1} + \frac{b^2}{x_2} + \frac{c^2}{x_3} = 0$$

Um nun darzutun, dass für denselben diese Gleichung erfüllt ist, multipliciren wir Dividend und Divisor des ersten Quotienten mit $m\beta + n\gamma$, des zweiten mit $m\alpha + n\beta$, des dritten mit $m\gamma + n\alpha$. Dadurch werden alle drei Nenner gleich, und die linke Seite der obigen Gleichung erhält also die Form:

$$\text{oder:} \quad a^2(m\beta + n\gamma) + b^2(m\alpha + n\beta) + c^2(m\gamma + n\alpha)$$

$$\text{oder:} \quad m(a^2\beta + b^2\alpha + c^2\gamma) + n(a^2\gamma + b^2\beta + c^2\alpha)$$

$$m \cdot \begin{vmatrix} b^2 & c^2 & b^2 \\ a^3 & b^2 & a^2 \\ c^2 & a^2 & c^2 \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} c^2 & c^2 & b^2 \\ b^2 & b^2 & a^2 \\ a^2 & a^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

in welcher Summe ersichtlich jeder der beiden Summanden für sich gleich 0 ist. Da also die Gleichung für beliebige m und n erfüllt ist, so ist es selbstverständlich, dass auch die beiden Segmentärpunkte O_2 und O'_2 ($m = 0$ bzw. $n = 0$), ferner der Greve'sche Punkt G_2 ($m + n = 0$), sowie der Punkt M'_2 ($m = n$) auf jenem Kreise liegen. Da ferner die obige Gleichung auch für ein negatives m oder n erfüllt ist, so dürfen die homologen Punkte auch auf den Verlängerungen der Dreiecksseiten gewählt werden.

III.

Die soeben durchgeführten Untersuchungen sind nun nach doppelter Richtung der Verallgemeinerung fähig. Zunächst ist nämlich ersichtlich, dass die analytischen Formeln, welche seither zum Beweise der aufgestellten Sätze Verwendung fanden, auch dann ihre Giltigkeit behalten, wenn an Stelle der Exponenten 2, mit denen die Coordinaten der in Betracht kommenden Punkte versehen waren, irgend eine andere Zahl tritt; des weiteren aber lässt eine genauere Untersuchung erkennen, dass, wenn man den Punkt A_2 mit irgend welchen Punkten auf CA oder AB und entsprechend B_2 und C_2 mit den homologen Punkten auf AB und BC bzw. BC und CA verbindet, sich ähnliche Sätze ergeben, wie die oben abgeleiteten, und dass auch diese Sätze sich wieder verallgemeinern lassen.

Um nun die Untersuchung nach der eben angedeuteten dreifachen Richtung ganz allgemein durchzuführen, gehen wir von drei Punkten aus, welche mit A_m , B_m , C_m bezeichnet seien und durch die Ausdrücke bestimmt sind ¹⁾

1) Ueber die Construction dieser Punkte für den Fall, dass m eine ganze Zahl vorstellt, siehe das Programm des kgl. Gymnasiums zu Kempten vom Jahre 1889.

$$A_m \equiv a^m A + c^m B + b^m C$$

$$B_m \equiv c^m A + b^m B + a^m C$$

$$C_m \equiv b^m A + a^m B + c^m C$$

in welchen Ausdrücken m irgend eine positive oder negative Zahl bezeichnet. Verbindet man nun homologe Punkte

1) auf BC mit A_m auf CA mit B_m auf AB mit C_m

2) auf BC mit C_m auf CA mit A_m auf AB mit B_m

3) auf BC mit B_m auf CA mit C_m auf AB mit A_m

so schneiden sich in allen drei Fällen je drei solcher Verbindungslinien in demselben Punkte.

Es seien nämlich die drei Seiten des Coordinatendreiecks im Verhältniss von $q:p$ geteilt, und es werde der Teilungspunkt auf BC mit A_{pq} auf CA mit B_{pq} auf AB mit C_{pq} bezeichnet, dann erscheint der Punkt

$$A_{pq} \equiv pB + qC$$

im ersten Falle mit A_m , im zweiten mit C_m , im dritten mit B_m verbunden. Sind ferner die Punkte

$$B_{pq} \equiv qA + pC$$

und

$$C_{pq} \equiv pA + qB$$

in der oben näher bezeichneten Weise mit den Punkten A_m , B_m , C_m , jeweilig verbunden, und bildet man in jedem der drei Fälle die der Formel 3) entsprechende Determinante, so ergibt sich:

$$1) \begin{vmatrix} pb^m - qc^m, & qa^m, & -pa^m \\ -pb^m, & pc^m - qa^m, & qb^m \\ qc^m, & -pc^m, & pa^m - qb^m \end{vmatrix} = 0$$

$$2) \begin{vmatrix} -pc^m, & pa^m - qb^m, & qc^m \\ qa^m, & -pa^m, & pb^m - qc^m \\ pc^m - qa^m, & qb^m, & -pb^m \end{vmatrix} = 0$$

$$3) \begin{vmatrix} pa^m - qb^m, & qc^m, & -pc^m \\ -pa^m, & pb^m - qc^m, & qa^m \\ qb^m, & -pb^m, & pc^m - qa^m \end{vmatrix} = 0$$

Es ist also die nämliche Determinante (nur Columnen und Reihen sind cyclisch vertauscht), welche man in den drei Fällen erhält,

und deren Verschwinden die Richtigkeit der obigen Behauptungen erhärtet.

Für die Coordinaten eines Schnittpunktes erhält man in jedem der drei Fälle aus der betr. Determinante den Ausdruck:

$$1) \quad x_1 : x_2 : x_3 = a^m(q^2b^m + p^2c^m - pq a^m) : b^m(q^2c^m + p^2a^m - pq b^m) : c^m(q^2a^m + p^2b^m - pq c^m)$$

$$2) \quad x_1 : x_2 : x_3 = b^m(q^2c^m + p^2a^m - pq b^m) : c^m(q^2a^m + p^2b^m - pq c^m) : a^m(q^2b^m + p^2c^m - pq a^m)$$

$$3) \quad x_1 : x_2 : x_3 = c^m(q^2a^m + p^2b^m - pq c^m) : a^m(q^2b^m + p^2c^m - pq a^m) : b^m(q^2c^m + p^2a^m - pq b^m)$$

Wie man sieht, treten in den drei Fällen die nämlichen Coordinaten, nur in veränderter Reihenfolge (cyklisch vertauscht) auf.

Setzen wir nun in diesen Ausdrücken, um einige Punkte näher kennen zu lernen, $p = 0$, so wird der Ausdruck für den Schnittpunkt

$$1) \quad Y_1 \equiv \frac{1}{c^m} A + \frac{1}{a^m} B + \frac{1}{b^m} C$$

$$2) \quad Y_2 \equiv \frac{1}{a^m} A + \frac{1}{b^m} B + \frac{1}{c^m} C$$

$$3) \quad Y_3 \equiv \frac{1}{b^m} A + \frac{1}{c^m} B + \frac{1}{a^m} C$$

Der erste Punkt ist zu bezeichnen mit O'_m , der zweite mit G_{-m} , der dritte mit O_m .

Setzen wir $q = 0$, so wird

$$1) \quad Y_1 \equiv \frac{1}{b^m} A + \frac{1}{c^m} B + \frac{1}{a^m} C$$

$$2) \quad Y_2 \equiv \frac{1}{c^m} A + \frac{1}{a^m} B + \frac{1}{b^m} C$$

$$3) \quad Y_3 \equiv \frac{1}{a^m} A + \frac{1}{b^m} B + \frac{4}{c^m} C$$

Der erste Punkt ist wieder O_m , der zweite O'_m , der dritte G_{-m} .

Setzen wir $p = q$, verbinden wir also die Mitten der Seiten des Coordinatendreiecks mit den Punkten A_m , B_m , C_m , so wird

- 1) $Y_1 \equiv a^m(b^m + c^m - a^m)A + b^m(a^m + c^m - b^m)B + c^m(a^m + b^m - c^m)C$
- 2) $Y_2 \equiv b^m(a^m + c^m - b^m)A + c^m(a^m + b^m - c^m)B + a^m(b^m + c^m - a^m)C$
- 3) $Y_3 \equiv c^m(a^m + b^m - c^m)A + a^m(b^m + c^m - a^m)B + b^m(a^m + c^m - b^m)C$

Diese Punkte seien bezeichnet bezüglich mit M_{m1} , M_{m2} und M_{m3} .

Setzen wir $q = -p$, ziehen wir also durch die Punkte A_m , B_m , C_m Parallele zu den Seiten des Coordinatendreiecks, so ergibt sich

- 1) $Y_1 \equiv a^m A + b^m B + c^m C$
- 2) $Y_2 \equiv b^m A + c^m B + a^m C$
- 3) $Y_3 \equiv c^m A + a^m B + b^m C$

Diese Punkte sind dann zu bezeichnen mit G_{m1} , G_{m2} und G_{m3} .

Kehren wir nun zu dem allgemeinen Ausdrucke für einen Schnittpunkt dreier entsprechender Verbindungslinien der Punkte A_m , B_m , C_m mit homologen Punkten auf den Seiten des Dreiecks ABC zurück. Derselbe ist für den ersten Fall

$$Y_1 \equiv a^m(q^2 b^m + p^2 c^m - p q a^m)A + b^m(q^2 c^m + p^2 a^m - p q b^m)B \\ + c^m(q^2 a^m + p^2 b^m - p q c^m)C$$

Für den zweiten und dritten Fall sind die Ausdrücke von derselben Form, nur die Coordinaten erscheinen cyklisch um eine bzw. zwei Stellen verschoben. Da aber diese Ausdrücke, falls man m als constant betrachtet, eigentlich nur eine Unbekannte und diese in keiner höheren als in der zweiten Potenz enthalten, so erschliesst man daraus, dass alle in der angegebenen Weise für dasselbe m erhaltenen Schnittpunkte auf Kegelschnitten liegen¹⁾, und dass man für dasselbe m drei solche Kegelschnitte zu unterscheiden hat. Gibt man aber dem m verschiedene Werte, so erhält man drei Scharen von Kegelschnitten.

Um nun noch Näheres über diese Kegelschnitte zu erfahren, transformiren wir die Coordinaten, indem wir das Dreieck $A_m B_m C_m$ als Coordinatendreieck betrachten. Das zu diesem Zwecke einzuschlagende Verfahren ist dasselbe, wie es bereits früher beobachtet wurde. Man entwickelt aus den Ausdrücken für A_m etc. die Werte für A , B und C und setzt diese dann in die im ursprünglichen Coordinatensystem gegebenen Ausdrücke ein. Setzt man nun

1) Möbius, d. b. C. 1. Abschn. § 59.

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a^m & c^m & b^m \\ c^m & b^m & a^m \\ b^m & a^m & c^m \end{vmatrix} = a^m \alpha_m + c^m \beta_m + b^m \gamma_m$$

so wird

$$A \equiv \alpha_m A_m + \beta_m B_m + \gamma_m C_m$$

$$B \equiv \beta_m A_m + \gamma_m B_m + \alpha_m C_m$$

$$C \equiv \gamma_m A_m + \alpha_m B_m + \beta_m C_m$$

Nun überzeugt man sich leicht, dass alle hier in Betracht kommenden Kegelschnitte dem entsprechenden Dreieck $A_m B_m C_m$ umschrieben sind. Liegt nämlich ein Punkt auf einem Kegelschnitte, welcher einem Dreiecke umschrieben ist, so müssen die Coordinaten x_1, x_2, x_3 desselben, bezogen auf eben dieses Dreieck, der Gleichung genügen

$$\frac{f}{x_1} + \frac{g}{x_2} + \frac{h}{x_3} = 0 \quad 1)$$

in welcher f, g und h Constante bezeichnen, deren Verhältniss durch zwei weitere Punkte, welche auf dem betreffenden Kegelschnitte liegen, bestimmt werden kann. Wir wählen zur Bestimmung desselben für den ersten Fall die Punkte O_m und O'_m , für den zweiten die Punkte O_m' und G_{-m} , für den dritten die Punkte G_{-m} und O_m , von denen wir oben schon gesehen, dass sie jedesmal auf dem betr. Kegelschnitte liegen.

Zunächst sind nun die Ausdrücke für die Punkte O_m, O'_m und G_{-m} im neuen Coordinatensystem abzuleiten. Da nun im ursprünglichen Coordinatensysteme

$$O_m \equiv a^m c^m A + a^m b^m B + b^m c^m C$$

war, so erhält man nunmehr

$$O_m \equiv (a^m c^m \alpha_m + a^m b^m \beta_m + b^m c^m \gamma_m) A_m + (a^m c^m \beta_m + a^m b^m \gamma_m + b^m c^m \alpha_m) B_m \\ + (a^m c^m \gamma_m + a^m b^m \alpha_m + b^m c^m \beta_m) C_m$$

Dieser Ausdruck lässt sich nun mit Rücksicht auf die Determinante Δ_m umgestalten. Es ist nämlich auf Grund dieser Determinante

$$c^m \alpha_m + b^m \beta_m + a^m \gamma_m = 0$$

und

$$b^m \alpha_m + a^m \beta_m + c^m \gamma_m = 0$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen ergibt sich

1) Möbius, d. b. C. 3. Abschn. § 250.

$$O_m \equiv (b^m c^m - a^{2m}) \gamma_m A_m + (a^m c^m - b^{2m}) \beta_m B_m + (a^m b^m - c^{2m}) \alpha_m C_m$$

oder endlich

$$O_m \equiv \alpha_m \gamma_m A_m + \beta_m \gamma_m B_m + \alpha_m \beta_m C_m$$

Der Ausdruck für O'_m war im ursprünglichen Coordinatensysteme

$$O'_m \equiv a^m b^m A + b^m c^m B + a^m c^m C$$

Mithin erhält man nunmehr

$$O'_m \equiv (a^m b^m \alpha_m + b^m c^m \beta_m + a^m c^m \gamma_m) A_m + (a^m b^m \beta_m + b^m c^m \gamma_m + a^m c^m \alpha_m) B_m \\ + (a^m b^m \gamma_m + b^m c^m \alpha_m + a^m c^m \beta_m) C_m$$

oder mit Rücksicht auf Δ_m

$$O'_m \equiv (b^m c^m - a^{2m}) \beta_m A_m + (a^m c^m - b^{2m}) \alpha_m B_m + (a^m b^m - c^{2m}) \gamma_m C_m$$

oder endlich

$$O'_m \equiv \alpha_m \beta_m A_m + \alpha_m \gamma_m B_m + \beta_m \gamma_m C_m$$

Für G_{-m} schliesslich hatte man im ursprünglichen Coordinatensystem

$$G_{-m} = b^m c^m A + a^m c^m B + a^m b^m C$$

folglich erhält man nunmehr

$$G_{-m} \equiv (b^m c^m \alpha_m + a^m c^m \beta_m + a^m b^m \gamma_m) A_m + (b^m c^m \beta_m + a^m c^m \gamma_m + a^m b^m \alpha_m) B_m \\ + (b^m c^m \gamma_m + a^m c^m \alpha_m + a^m b^m \beta_m) C_m$$

oder

$$G_{-m} \equiv (a^m b^m - c^{2m}) \gamma_m A_m + (a^m b^m - c^{2m}) \alpha_m B_m + (a^m c^m - b^{2m}) \alpha_m C_m$$

oder endlich

$$G_{-m} \equiv \beta_m \gamma_m A_m + \beta_m \alpha_m B_m + \gamma_m \alpha_m C_m$$

Wir gehen nun zur Bestimmung der Constanten f , g und h für die drei Kegelschnittschaaren über.

1) Es liegen auf jedem hieher gehörigen Kegelschnitte die Punkte O_m und O'_m , mithin erhält man zur Bestimmung jener Constanten die beiden Gleichungen

$$\beta_m f + \alpha_m g + \gamma_m h = 0$$

$$\gamma_m f + \beta_m g + \alpha_m h = 0$$

Daraus wird

$$f : g : h = (\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) : (\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m) : (\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m)$$

Gestaltet man die rechte Seite der Gleichung entsprechend um, so wird

$$f : g : h = a^m : b^m : c^m$$

2) Auf den hieher gehörigen Kegelschnitten liegen die Punkte O'_m und G_{-m} , deshalb hat man:

$$\gamma_m f + \beta_m g + \alpha_m h = 0$$

$$\alpha_m f + \gamma_m g + \beta_m h = 0$$

Man erhält daraus

$$f : g : h = (\beta_m^2 - \alpha_m \gamma_m) : (\alpha_m^2 - \beta_m \gamma_m) : (\gamma_m^2 - \alpha_m \beta_m)$$

also

$$f : g : h = c^m : a^m : b^m$$

3) Es liegen auf den Kegelschnitten der dritten Schaar die Punkte G_{-m} und O_m , deshalb hat man

$$\alpha_m f + \gamma_m g + \beta_m h = 0$$

$$\beta_m f + \alpha_m g + \gamma_m h = 0$$

woraus man zieht

$$f : g : h = (\gamma_m^2 - \alpha_m \beta_m) : (\beta_m^2 - \alpha_m \gamma_m) : (\alpha_m^2 - \beta_m \gamma_m)$$

oder umgestaltet

$$f : g : h = b^m : c^m : a^m$$

Dass nun in allen drei Fällen die betr. Schnittpunkte je dreier Geraden auf den so bestimmten Kegelschnitten liegen, ergibt sich in ähnlicher Weise, wie dies oben bezüglich der Punkte, welche auf dem Brocard'schen Kreise liegen, ausgeführt wurde.

1. Für die Coordinaten x_1, x_2, x_3 irgend eines Punktes auf der Geraden, welche den Punkt A_m mit irgend einem Punkte auf BC , der diese Gerade im Verhältniss $q:p$ teilt, verbindet, hat man in Bezug auf $A_m B_m C_m$ als Coordinatendreieck

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ p\beta_m + q\gamma_m & p\gamma_m + q\alpha_m & p\alpha_m + q\beta_m \end{vmatrix} = 0$$

d. i.

$$x_2(p\alpha_m + q\beta_m) = x_3(p\gamma_m + q\alpha_m)$$

Für die Coordinaten eines Punktes auf der Geraden, welche den entsprechenden Punkt auf CA mit B_m verbindet, hat man

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ p\gamma_m + q\alpha_m & p\alpha_m + q\beta_m & p\beta_m + q\gamma_m \end{vmatrix} = 0$$

d. i.

$$x_1(p\beta_m + q\gamma_m) = x_3(p\gamma_m + q\alpha_m)$$

Für den Schnittpunkt beider Geraden also hat man

$$x_1(p\beta_m + q\gamma_m) = x_2(p\alpha_m + q\beta_m) = x_3(p\gamma_m + q\alpha_m)$$

Soll aber ein Punkt auf einem der ersten Reihe angehörigen Kegelschnitte liegen, so müssen seine Coordinaten der Gleichung genügen

$$\frac{a^m}{x_1} + \frac{b^m}{x_2} + \frac{c^m}{x_3} = 0$$

welchen Ausdruck man auch so gestalten kann

$$\frac{a^m(p\beta_m + q\gamma_m)}{x_1(p\beta_m + q\gamma_m)} + \frac{b^m(p\alpha_m + q\beta_m)}{x_2(p\alpha_m + q\beta_m)} + \frac{c^m(p\gamma_m + q\alpha_m)}{x_3(p\gamma_m + q\alpha_m)} = 0$$

Da für den vorliegenden Fall die Divisoren dieser Quotienten gleich sind, so müsste nur von der Summe der Dividenden erwiesen werden, dass sie verschwindet. Dies ist aber in der That der Fall, da auf Grund der Determinante $\mathcal{A}_m$ sowol

$$p(a^m\beta_m + b^m\alpha_m + c^m\gamma_m) = 0$$

als auch

$$q(a^m\gamma_m + b^m\beta_m + c^m\alpha_m) = 0$$

ist. Also liegen alle hieher gehörigen Schnittpunkte auf Kegelschnitten, welche den Dreiecken A_m , B_m , C_m umschrieben sind.

2. Für die Coordinaten x_1 , x_2 , x_3 irgend eines Punktes auf der Geraden, welche den Punkt A_m mit einem Punkte auf CA verbindet, welcher diese Seite im Verhältniss $q:p$ teilt, hat man in Bezug auf $A_mB_mC_m$:

$$x_2(p\beta_m + q\gamma_m) = x_3(p\alpha_m + q\beta_m)$$

Für die Coordinaten eines Punktes auf der Geraden, welche den entsprechenden Punkt auf AB mit B_m verbindet, ergibt sich ferner

$$x_1(p\gamma_m + q\alpha_m) = x_3(p\alpha_m + q\beta_m)$$

Es muss aber für einen Punkt, welcher auf einem zur zweiten Reihe gehörigen Kegelschnitte liegen soll, die Gleichung erfüllt sein

$$\frac{c^m}{x_1} + \frac{a^m}{x_2} + \frac{b^m}{x_3} = 0$$

oder

$$\frac{c^m(p\gamma_m + q\alpha_m)}{x_1(p\gamma_m + q\alpha_m)} + \frac{a^m(p\beta_m + q\gamma_m)}{x_2(p\beta_m + q\gamma_m)} + \frac{b^m(p\alpha_m + q\beta_m)}{x_3(p\alpha_m + q\beta_m)} = 0$$

Auch hier sind für die Schnittpunkte der in Betracht gezogenen Geraden die Divisoren gleich und die Summe der Dividenden auf Grund von Δ_m gleich null.

3. Für die Coordinaten x_1, x_2, x_3 irgend eines Punktes auf der Geraden; welche den Punkt A_m mit einem Punkte auf der Geraden AB verbindet, welcher diese Gerade im Verhältniss $q:p$ teilt, hat man

$$x_2(p\gamma_m + q\alpha_m) = x_3(p\beta_m + q\gamma_m)$$

Ebenso hat man für die Coordinaten eines Punktes auf der Geraden welche den entsprechenden Punkt auf CA mit C_m verbindet

$$x_1(p\alpha_m + q\beta_m) = x_2(p\gamma_m + q\alpha_m)$$

so dass auch in diesem Falle

$$\frac{b^m}{x_1} + \frac{c^m}{x_2} + \frac{a^m}{x_3} = 0$$

ist, wovon man sich in derselben Weise wie unter 1. oder 2. überzeugt.

Wir haben also in der That für jedes m drei Kegelschnitte, welche alle drei dem Dreieck $A_m B_m C_m$ umschrieben sind, und von denen der erste und zweite ausserdem noch den Punkt O'_m , der erste und dritte den Punkt O_m , der zweite und dritte den Punkt G_{-m} gemein haben.

Auf jedem dieser Kegelschnitte können wir nun noch drei merkwürdige Punkte unterscheiden, welche man erhält, wenn man einerseits G_0 mit $A_m B_m C_m$, anderseits die Punkte G_m mit A, B, C verbindet.

1. Verbindet man G_0 mit A_m und G_{m1} mit A , so schneiden sich diese beiden Geraden auf dem der ersten Reihe angehörigen Kegelschnitte; ebenso schneiden sich $G_0 B_m$ und $G_{m1} B$ und endlich $G_0 C_m$ und $G_{m1} C$ auf diesem Kegelschnitte.

Verbindet man nämlich G_0 , dessen Coordinaten auch in Bezug auf das Dreieck $A_m B_m C_m$ wieder dieselben sind, wie in Bezug auf ABC , da er auch der Schwerpunkt des Dreiecks $A_m B_m C_m$ ist, mit $A_m(1, 0, 0)$, so wird (Formel 2)

$$\alpha_{12} = 0, \quad \beta_{12} = 1, \quad \gamma_{12} = -1$$

und wenn man ferner den Punkt

$$G_{m1} \equiv (a^m \alpha_m + b^m \beta_m + c^m \gamma_m) A_m + (a^m \beta_m + b^m \gamma_m + c^m \alpha_m) B_m \\ + (a^m \gamma_m + b^m \alpha_m + c^m \beta_m) C_m$$

mit

$$A = \alpha_m A_m + \beta_m B_m + \gamma_m C_m$$

verbindet, so wird

$$\alpha_{34} = b^m(\gamma_m^2 - \alpha_m \beta_m) - c^m(\beta_m^2 - \alpha_m \gamma_m)$$

$$\beta_{34} = b^m(\alpha_m^2 - \beta_m \gamma_m) - c^m(\gamma_m^2 - \alpha_m \beta_m)$$

$$\gamma_{34} = b^m(\beta_m^2 - \alpha_m \gamma_m) - c^m(\alpha_m^2 - \beta_m \gamma_m)$$

Man hat mithin für die Coordinaten x_1, x_2, x_3 des Schnittpunktes der beiden Geraden $G_0 A_m$ und $G_{m1} A$

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= [b^m(\beta_m^2 - \alpha_m \gamma_m) - c^m(\alpha_m^2 - \beta_m \gamma_m) \\ &\quad + b^m(\alpha_m^2 - \beta_m \gamma_m) - c^m(\gamma_m^2 - \alpha_m \beta_m)] \\ &: [c^m(\beta_m^2 - \alpha_m \gamma_m) - b^m(\gamma_m^2 - \alpha_m \beta_m)] : [c^m(\beta_m^2 - \alpha_m \gamma_m) \\ &\quad - b^m(\gamma_m^2 - \alpha_m \beta_m)] \end{aligned}$$

Auf Grund der Determinante Δ_m lassen sich diese Ausdrücke umgestalten, so dass man schliesslich hat

$$x_1 : x_2 : x_3 = (-\alpha^m) : (b^m + c^m) : (b^m + c^m)$$

Soll nun der Schnittpunkt der beiden Geraden $G_0 A_m$ und $G_{m1} A$ auf dem der ersten Reihe angehörigen Kegelschnitte liegen, so muss man haben

$$\frac{\alpha^m}{x_1} + \frac{b^m}{x_2} + \frac{c^m}{x_3} = 0$$

also

$$-\frac{\alpha^m}{\alpha^m} + \frac{b^m}{b^m + c^m} + \frac{c^m}{b^m + c^m} = 0$$

was offenbar der Fall ist.

Aus der Symmetrie der in Betracht gekommenen Ausdrücke kann man nun schliessen, dass auch die Geraden $G_0 B_m$ und $G_{m1} B$ einerseits, sowie die Geraden $G_0 C_m$ und $G_{m1} C$ andererseits sich auf dem betr. Kegelschnitte schneiden, und man hat im zweiten Falle für die Coordinaten des Schnittpunktes

$$x_1 : x_2 : x_3 = (\alpha^m + c^m) : (-b^m) : (\alpha^m + c^m)$$

im letzten Falle aber

$$x_1 : x_2 : x_3 = (\alpha^m + b^m) : (\alpha^m + b^m) : (-c^m)$$

2. Verbindet man G_0 mit B_m und G_{m2} mit C , so schneiden sich beide Gerade auf dem Kegelschnitte, welcher der zweiten Reihe angehört, ebenso schneiden sich die Geraden $G_0 C_m$ und $G_{m2} A$ und endlich die Geraden $G_0 A_m$ und $G_{m2} B$ auf diesem Kegelschnitte.

Man erhält, wenn man die Rechnung genau so wie unter 1. durchführt, für den Schnittpunkt der Geraden $G_0 B_m$ und $G_{m2} C$

$$\alpha_{12} = 1, \quad \beta_{12} = 0, \quad \gamma_{12} = -1$$

$$\alpha_{34} = c^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \gamma_m - \beta^2_m)$$

$$\beta_{34} = c^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)$$

$$\gamma_{34} = c^m(\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m) + b^m(\beta_m \gamma_m - \alpha^2_m)$$

Mithin wird

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 = & [c^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)] : -[c^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) \\ & + b^m(\alpha_m \gamma_m - \beta^2_m) + c^m(\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m) + b^m(\beta_m \gamma_m - \alpha^2_m)] \\ & : [c^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)] \end{aligned}$$

oder

$$x_1 : x_2 : x_3 = (b^m + c^m) : -a^m : b^m + c^m$$

Da nun im vorliegenden Falle für einen Punkt, welcher auf dem betr. Kegelschnitte liegen soll, wie wir oben fanden, die Gleichung erfüllt sein muss

$$\frac{c^m}{x_1} + \frac{a^m}{x_2} + \frac{b^m}{x_3} = 0$$

so erkennt man, dass der Schnittpunkt der Geraden $G_0 B_m$ und $G_{m2} C$ auf diesem Kegelschnitte liegt. Es liegt aber auch der Schnittpunkt der Geraden $G_0 C_m$ und $G_{m2} A$ auf demselben, da für die Coordinaten desselben die Gleichung besteht

$$x_1 : x_2 : x_3 = (a^m + c^m) : (a^m + c^m) : (-b^m)$$

und endlich liegt der Schnittpunkt der Geraden $G_0 A_m$ und $G_{m2} B$ auf demselben, da man für jenen hat

$$x_1 : x_2 : x_3 = (-c^m) : (a^m + b^m) : (a^m + b^m)$$

3. Verbindet man G_0 mit B_m und G_{m3} mit A , so schneiden sich beide Gerade auf dem betr. Kegelschnitte, welcher der dritten Schaar angehört. Auf diesem schneiden sich aber auch die Geraden $G_0 C_m$ und $G_{m3} B$ einerseits und $G_0 A_m$ und $G_{m3} C$ andererseits. Man hat nämlich für den Schnittpunkt von $G_0 B_m$ mit $G_{m3} A$

$$\alpha_{12} = 1, \quad \beta_{12} = 0, \quad \gamma_{12} = -1$$

$$\alpha_{34} = a^m(\gamma^2_m - \beta_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)$$

$$\beta_{34} = a^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)$$

$$\gamma_{34} = a^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) + b^m(\gamma_m \beta_m - \alpha^2_m)$$

Es wird also

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 = & [a^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)] \\ & : [a^m(\alpha_m \beta_m + \alpha_m \gamma_m - \beta^2_m - \gamma^2_m) + b^m(\alpha^2_m + \beta^2_m - \alpha_m \gamma_m - \beta_m \gamma_m)] \\ & : [a^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)] \end{aligned}$$

oder

$$x_1 : x_2 : x_3 = (a^m + b^m) : (-c^m) : (a^m + b^m)$$

Soll aber der Punkt auf dem Kegelschnitte liegen, so muss für den vorliegenden Fall die Gleichung erfüllt sein

$$\frac{b^m}{x_1} + \frac{c^m}{x_2} + \frac{a^m}{x_3} = 0$$

was offenbar der Fall ist.

Für den Schnittpunkt von $G_0 C_m$ und $G_{m3} B$ hat man

$$x_1 : x_2 : x_3 = (b^m + c^m) : (b^m + c^m) : (-a^m)$$

und für den Schnittpunkt von $G_0 A_m$ und $G_{m3} C$

$$x_1 : x_2 : x_3 = (-b^m) : (a^m + c^m) : (a^m + c^m)$$

so dass also auch diese beiden Punkte auf dem betr. Kegelschnitte liegen.

Was nun die besondere Form der Kegelschnitte angeht, welche in den drei Fällen in der geschilderten Weise entstehen, so erhält man darüber Aufschluss, wenn man beachtet, dass ein Punkt im Unendlichen liegt, wenn dessen Coordinaten die Gleichung erfüllen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Die Summe der Coordinaten irgend eines Punktes, der auf einem der in Betracht kommenden Kegelschnitte liegt, ist aber in allen drei Fällen dargestellt durch den Ausdruck:

$$a^m(q^2 b^m + p^2 c^m - pqa^m) + b^m(q^2 c^m + p^2 a^m - pqb^m) \\ + c^m(q^2 a^m + p^2 b^m - pqc^m)$$

Unter Beachtung der obigen Bemerkung leitet man daraus leicht die ganz allgemein geltende Formel ab, dass der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel sei, je nachdem der Ausdruck

$$a^{2m} + b^{2m} + c^{2m} - 2(a^m b^m + a^m c^m + b^m c^m) \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0$$

ist. Dieser Ausdruck lässt erkennen, dass im allgemeinen für jedes m je nach der Gestalt des Dreiecks alle möglichen Arten von Kegelschnitten auf die geschilderte Art entstehen können. Nur für $m = 1$ und für $m = 2$ sind die Kegelschnitte immer Ellipsen

Ist nämlich $m = 1$, so lautet der obige Ausdruck

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc)$$

dieser aber ist immer negativ. Man kann nämlich dafür auch setzen

$$(a - b)^2 - c(2a + 2b - c)$$

Nun ist aber $a - b < c$. Setzt man also dafür das grössere c , so wird die obige Differenz grösser, sie ist aber dann immer noch negativ, wie man sofort erkennt, wenn man dieselbe folgendermassen ordnet

$$-2c(a + b - c)$$

da ja $a + b - c$ immer positiv ist.

Ist ferner $m = 2$, so wird wieder der für die Form des Kegelschnitts massgebende Ausdruck

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) < 0$$

Bezeichnet nämlich m_c die Mittellinie zur Seite c des fraglichen Dreiecks, so wird

$$c^4 + (a^2 - b^2)^2 - 2c^2(a^2 + b^2) = c^4 + (b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha - b^2)^2 - 2c^2(\frac{1}{2}c^2 + 2m_c^2) = c^2(c - 2b \cos \alpha)^2 - 4c^2m_c^2$$

Unterdrückt man den Factor $4c^2$, so ist der Ausdruck

$$\left(\frac{c}{2} - b \cos \alpha\right)^2 - m_c^2 < 0$$

denn es ist $\frac{c}{2} - b \cos \alpha$ die Kathete, m_c aber die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks.

Hat man für $m = 2$ den Kegelschnitt im Auge, welcher der ersten Schaar angehört, so hätte es des vorstehenden Nachweises nicht bedurft, da für diesen Fall die Formel für den Kreis, deren allgemeine Giltigkeit erwiesen ist, zur Anwendung gelangt, und der fragliche Kegelschnitt mit dem Brocard'schen Kreise identisch ist. Ist $m > 2$ oder $m < 0$, so hängt die Gestalt der entsprechenden Kegelschnitte von dem Verhältnisse der Dreiecksseiten $a:b:c$ ab; so ist z. B. für das rechtwinklige Dreieck, dessen Seiten im Verhältniss von $5:4:3$ stehen, und für $m = 4$ der Kegelschnitt in den drei Fällen eine Parabel. Es geht nämlich, wie noch bemerkt werden möge, aus der obigen für alle drei Schaaren geltenden Formel hervor, dass die Form des Kegelschnittes in allen drei Fällen für ein bestimmtes m (vom Kreise abgesehen) die nämliche ist.

Was endlich die Mittelpunkte der im Vorhergehenden betrachteten Kegelschnitte angeht, so ist ganz allgemein der Ausdruck für einen derselben

$$Z \equiv f(g + h - f)A + g(f + h - g)B + h(f + g - h)C^1)$$

falls die betr. Constanten des fraglichen Kegelschnittes f , g und h sind. Sind also die Mittelpunkte der ersten Schaar mit Z_{m1} , der zweiten mit Z_{m2} , der dritten mit Z_{m3} bezeichnet, so erhält man

$$Z_{m1} \equiv a^m(b^m + c^m - a^m)A_m + b^m(a^m + c^m - b^m)B_m + c^m(a^m + b^m - c^m)C_m$$

$$Z_{m2} \equiv c^m(a^m + b^m - c^m)A_m + a^m(b^m + c^m - a^m)B_m + b^m(a^m + c^m - b^m)C_m$$

$$Z_{m3} \equiv b^m(a^m + c^m - b^m)A_m + c^m(a^m + b^m - c^m)B_m + a^m(b^m + c^m - a^m)C_m$$

Um diese Punkte mit anderen vergleichen zu können, sollen dieselben auf das ursprüngliche Coordinatensystem zurückgeführt werden, für welchen Fall für A_m , B_m , C_m wieder ihre Werte in A , B , C zu setzen sind. Führt man dieses aus und reducirt, so erhält man

$$Z_{m1} \equiv a^m(2b^m c^m + a^m(b^m + c^m - a^m))A + b^m(2a^m c^m + b^m(a^m + c^m - b^m))B + c^m(2a^m b^m + c^m(a^m + b^m - c^m))C$$

$$Z_{m2} \equiv b^m(2a^m c^m + b^m(a^m + c^m - b^m))A + c^m(2a^m b^m + c^m(a^m + b^m - c^m))B + a^m(2b^m c^m + a^m(b^m + c^m - a^m))C$$

$$Z_{m3} \equiv c^m(2a^m b^m + c^m(a^m + b^m - c^m))A + a^m(2b^m c^m + a^m(b^m + c^m - a^m))B + b^m(2a^m c^m + b^m(a^m + c^m - b^m))C$$

Jeder dieser Punkte Z liegt nun auf der betr. Geraden GM , also z. B. Z_{m2} auf der Geraden $M_{m2}G_{m2}$. Da der Beweis dieser Behauptung in allen drei Fällen derselbe ist, soll er nur für die eben genannte Gerade geführt werden. Die Determinante (Formel 1) nimmt für diesen Fall die Form an

$$\begin{vmatrix} b^m, & c^m, & a^m \\ b^m(a^m + c^m - b^m), & c^m(a^m + b^m - c^m), & a^m(b^m + c^m - a^m) \\ b^m r & c^m s & a^m t \end{vmatrix}$$

worin r , s und t die betreffenden Factoren der Coordinaten von Z_{m2} bezeichnen. Hebt man in dieser Determinante die den Columnen gemeinsamen Factoren heraus, multiplicirt sodann die erste Reihe mit $a^m + b^m + c^m$ und subtrahirt dieselbe von der zweiten, so kann man unter Hinweglassung des Factors $-2a^m b^m c^m$ die Determinante so schreiben

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ b^m, & c^m, & a^m \\ r, & s, & t \end{vmatrix}$$

1) Möbius, d. b. C. 3. Abschn. § 267.

Wenn man nun die zweite Reihe mit $a^m + b^m + c^m$ multiplicirt und dieselbe zur dritten addirt, so werden die Glieder der letzten Reihe gleich, wie jene der ersten es sind, so dass also die Determinante verschwindet. Da nun, wie wir oben gesehen haben, die Punkte M_m und G_m auf den betr. Kegelschnitten liegen, die Geraden $M_m G_m$ also Sehnen derselben sind, so erkennt man nunmehr, da ja auch die Mittelpunkte der betr. Kegelschnitte auf diesen Geraden liegen, dass dieselben Durchmesser jener Curven bilden.

IV.

Wir denken uns nun durch die Punkte G Parallele zu den Seiten des Coordinatendreiecks gezogen. Die Schnittpunkte der Parallelen zu AB seien bezeichnet mit L'_m auf BC und J''_m auf AC , die der Parallelen zu AC seien auf $BC: L''_m$ auf $AB: N'_m$, die der Parallelen zu BC endlich seien auf $AC: J'_m$ und auf $AB: N''_m$. Da für jedes m drei verschiedene G zu unterscheiden sind, so ergeben sich achtzehn solcher Schnittpunkte, und es sind entsprechend den G die J , L und N für jeden Fall noch mit den unteren Indices 1, 2 und 3 zu versehen. Unter Hinweglassung der unteren Indices m erhalten wir dann für diese Schnittpunkte die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} 1) \quad L'_1 &\equiv (a^m + b^m)B + c^m C \\ L''_1 &\equiv b^m B + (a^m + c^m)C \\ J'_1 &\equiv a^m A + (b^m + c^m)C \\ J''_1 &\equiv (a^m + b^m)A + c^m C \\ N'_1 &\equiv (a^m + c^m)A + b^m B \\ N''_1 &\equiv a^m A + (b^m + c^m)B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad L'_2 &\equiv (b^m + c^m)B + a^m C \\ L''_2 &\equiv c^m B + (a^m + b^m)C \\ J'_2 &\equiv b^m A + (a^m + c^m)C \\ J''_2 &\equiv (b^m + c^m)A + a^m C \\ N'_2 &\equiv (a^m + b^m)A + c^m B \\ N''_2 &\equiv b^m A + (a^m + c^m)B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad L'_3 &\equiv (a^m + c^m)B + b^m C \\ L''_3 &\equiv a^m B + (b^m + c^m)C \\ J'_3 &\equiv c^m A + (a^m + b^m)C \\ J''_3 &\equiv (a^m + c^m)A + b^m C \\ N'_3 &\equiv (b^m + c^m)A + a^m B \\ N''_3 &\equiv c^m A + (a^m + b^m)B \end{aligned}$$

Was die Herleitung dieser Ausdrücke angeht, so ist dieselbe für die drei Gruppen die nämliche, sie möge daher nur für die zweite Gruppe durchgeführt werden. Wir hatten nämlich für G_{m2} den Ausdruck

$$G_{m2} \equiv b^m A + c^m B + a^m C$$

Es hat also die durch diesen Punkt zu AB gezogene Parallele die Gleichung ¹⁾

$$(x_1 + x_2)a^m = x_3(b^m + c^m)$$

für den Schnitt dieser Geraden mit BC hat man zudem noch

$$x_1 = 0$$

mithin wird der Schnittpunkt

$$L_2' \equiv (b^m + c^m)B + a^m C$$

Für den Schnitt der Parallelen mit AC hat man noch

$$x_2 = 0$$

mithin erhält man für den Schnittpunkt

$$J_2'' \equiv (b^m + a^m)A + a^m C$$

Die durch G_{m2} zu AC gezogene Parallele hat die Gleichung

$$(x_1 + x_3)c^m = x_2(a^m + b^m)$$

für den Schnitt dieser mit BC und AB ist zudem

$$x_1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_3 = 0$$

mithin wird

$$L_2'' \equiv c^m B + (a^m + b^m)C$$

und

$$N_2' \equiv (a^m + b^m)A + c^m B$$

Die durch G_{m2} zu BC gezogene Parallele endlich hat die Gleichung

$$x_1(a^m + c^m) = (x_2 + x_3)b^m$$

und da für den Schnitt derselben mit AC und AB zudem

$$x_2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_3 = 0$$

ist, so erhält man

$$J_2' \equiv b^m A + (a^m + c^m)C$$

und

$$N_2'' \equiv b^m A + (a^m + c^m)B$$

Durch die sechs Punkte jeder der oben aufgestellten Gruppen lässt sich nun immer ein Kegelschnitt legen. Um dieses darzutun,

1) S. Programm des kgl. Gymn. zu Kempten v. J. 1889. I 5a S. 10.

transformiren wir die Coordinaten, indem wir für die erste Gruppe das Dreieck $L_1' J_1' N_1'$ als Coordinatendreieck betrachten. Nun war aber

$$L_1' \equiv (a^m + b^m)B + c^m C$$

$$J_1' \equiv a^m A + (b^m + c^m)C$$

$$N_1' \equiv (a^m + c^m)A + b^m B$$

Entwickelt man aus diesen Gleichungen A , B und C , so erhält man

$$A \equiv -b^m(b^m + c^m)L_1' + b^m c^m J_1' + (a^m + b^m)(b^m + c^m)N_1'$$

$$B \equiv (b^m + c^m)(a^m + c^m)L_1' - c^m(a^m + c^m)J_1' + a^m c^m N_1'$$

$$C \equiv a^m b^m L_1' + (a^m + b^m)(a^m + c^m)J_1' - a^m(a^m + b^m)N_1'$$

Setzt man diese Werte in die oben für L_1'' , J_1'' , N_1'' gefundenen Ausdrücke ein, so erhält man

$$L_1'' \equiv b^m[(b^m + c^m)(a^m + c^m)L_1' - c^m(a^m + c^m)J_1' + a^m c^m N_1'] \\ + (a^m + c^m)[a^m b^m L_1' + (a^m + b^m)(a^m + c^m)J_1' - a^m(a^m + b^m)N_1']$$

oder nach vorgenommener Reduction

$$L_2'' \equiv b^m(a^m + c^m)L_1' + a^m(a^m + c^m)J_1' - a^{2m}N_1'$$

Ebenso erhält man für

$$J_1'' \equiv (a^m + b^m)[-b^m(b^m + c^m)L_1' + b^m c^m J_1' + (a^m + b^m)(b^m + c^m)N_1'] \\ + c^m[a^m b^m L_1' + (a^m + b^m)(a^m + c^m)J_1' - a^m(a^m + b^m)N_1']$$

oder reducirt

$$J_1'' = -b^{2m}L_1' + c^m(a^m + b^m)J_1' + b^m(a^m + b^m)N_1'$$

Endlich wird

$$N_1'' \equiv a^m[-b^m(b^m + c^m)L_1' + b^m c^m J_1' + (a^m + b^m)(b^m + c^m)N_1'] \\ + (b^m + c^m)[(b^m + c^m)(a^m + c^m)L_1' - c^m(a^m + c^m)J_1' + a^m c^m N_1']$$

oder vereinfacht

$$N_1'' \equiv c^m(b^m + c^m)L_1' - c^{2m}J_1' + a^m(b^m + c^m)N_1'$$

Wir bestimmen nun, wie früher, durch die Punkte L_1'' und J_1'' die Constanten f , g und h des betr. Kegelschnitts. Man erhält zu diesem Behufe die beiden Gleichungen

$$-\frac{f}{a^{2m}} + \frac{g}{b^m(a^m + c^m)} + \frac{h}{a^m(a^m + c^m)} = 0$$

$$\frac{f}{b^m(a^m + b^m)} - \frac{g}{b^{2m}} + \frac{h}{c^m(a^m + b^m)} = 0$$

wenn wir uns in den Ausdrücken für L_1'' und J_1'' die Glieder in der Reihenfolge N_1' , L_1' , J_1' denken. Aus beiden Gleichungen erhält man

$$f : g : h = a^m : b^m : c^m$$

Denkt man sich die Glieder von N_1'' ebenso geordnet, wie jene von L_1'' und J_1'' , so erkennt man aus der Gleichung

$$\frac{a^m}{a^m(b^m + c^m)} + \frac{b^m}{c^m(b^m + c^m)} + \frac{c^m}{c^{2m}} = 0$$

dass auch der Punkt N_1'' auf dem durch die fünf anderen Punkte bestimmten Kegelschnitte liegt.

Da nun die Coordinaten der Punkte der zweiten und dritten Gruppe ganz ähnlich gebildet sind, wie jene der ersten, so dürften wir wol daraus sofort den Schluss ziehen, dass auch die sechs Punkte der zweiten und dritten Gruppe immer auf einem Kegelschnitte liegen. Es soll indes wegen der Werte der Constanten f , g und h in Kürze für die zweite Gruppe dieser Beweis noch durchgeführt werden. Zunächst erhält man hier, ganz so wie oben, bei Transformation der Coordinaten auf das Dreieck $L_2'J_2'N_2'$ für A , B und C die Ausdrücke

$$A \equiv -c^m(a^m + c^m)L_2' + a^m c^m J_2' + (a^m + c^m)(b^m + c^m)N_2'$$

$$B \equiv (a^m + c^m)(a^m + b^m)L_2' - a^m(a^m + b^m)J_2' + a^m b^m N_2'$$

$$C \equiv b^m c^m L_2' + (a^m + b^m)(b^m + c^m)J_2' - b^m(b^m + c^m)N_2'$$

Des weiteren erhält man im neuen Coordinatensystem

$$L_2'' \equiv (a^m + b^m)c^m L_2' + (a^m + b^m)b^m J_2' - b^{2m}N_2'$$

$$J_2'' \equiv -c^{2m}L_2' + a^m(b^m + c^m)J_2' + c^m(b^m + c^m)N_2'$$

$$N_2'' \equiv a^m(a^m + c^m)L_2' - a^{2m}J_2' + b^m(a^m + c^m)N_2'$$

Benutzt man nun zur Bestimmung der Constanten f , g , h die Punkte L_2'' und J_2'' , indem man deren Ausdrücke in der Reihenfolge L_2' , J_2' , N_2' nimmt, so erhält man

$$\frac{f}{c^m(a^m + b^m)} + \frac{g}{b^m(a^m + b^m)} - \frac{h}{b^{2m}} = 0$$

$$- \frac{f}{c^{2m}} + \frac{g}{a^m(b^m + c^m)} + \frac{h}{c^m(b^m + c^m)} = 0$$

Daraus wird

$$f : g : h = c^m : a^m : b^m$$

und man erhält endlich für den Punkt N_2'' , nachdem dessen Ausdruck wie oben geordnet:

$$\frac{c^m}{a^m(a^m + c^m)} - \frac{a^m}{a^{2m}} + \frac{b^m}{b^m(a^m + c^m)} = 0$$

Für die dritte Kegelschnittschaar, für welche die vorhergehende Ableitung wiederkehren würde, möge nur noch bemerkt werden, dass man, falls man nach Transformation der Coordinaten die Ausdrücke in der Reihenfolge J_3' , N_3' , L_3' nimmt, für die den Kegelschnitt bestimmenden Constanten erhält

$$f : g : h = b^m : c^m : a^m$$

Bestimmen wir nun die Mittelpunkte der drei soeben betrachteten Kegelschnittschaaren, welche einstweilen mit Q_1 , Q_2 , Q_3 bezeichnet werden mögen. Wir erhalten dafür im Coordinatensystem L , J , N nach derselben Regel wie oben:

$$Q_1 \equiv a^m(b^m + c^m - a^m)N_1' + b^m(a^m + c^m - b^m)L_1' + c^m(a^m + b^m - c^m)J_1'$$

$$Q_2 \equiv c^m(a^m + b^m - c^m)L_2' + a^m(b^m + c^m - a^m)J_2' + b^m(a^m + c^m - b^m)N_2'$$

$$Q_3 \equiv b^m(a^m + c^m - b^m)J_3' + c^m(a^m + b^m - c^m)N_3' + a^m(b^m + c^m - a^m)L_3'$$

Geht man nunmehr auf das ursprüngliche Coordinatensystem zurück, indem man für J , L und N die oben für dieselben aufgestellten Werte in A , B , C setzt, so erhält man nach durchgeführter Reduction die Ausdrücke

$$Q_1 \equiv a^m(2bc^m + a^m(b^m + c^m - a^m))A + b^m(2a^m c^m + b^m(a^m + c^m - b^m))B + c^m(2a^m b^m + c^m(a^m + b^m - c^m))C$$

$$Q_2 \equiv b^m(2a^m c^m + b^m(a^m + c^m - b^m))A + c^m(2a^m b^m + c^m(a^m + b^m - c^m))B + a^m(2b^m c^m + a^m(b^m + c^m - a^m))C$$

$$Q_3 \equiv c^m(2a^m b^m + c^m(a^m + b^m - c^m))A + a^m(2b^m c^m + a^m(b^m + c^m - a^m))B + b^m(2a^m c^m + b^m(a^m + c^m - b^m))C$$

Vergleicht man aber diese Ausdrücke mit denjenigen, welche oben mit Z bezeichnet wurden, so findet sich, dass dieselben bzhw. identisch sind, d. h. es sind immer zwei Kegelschnitte, welche in beiden Fällen zu derselben Schaar und zu demselben m gehören, concentrisch. Zwei solche zusammengehörige Kegelschnitte sind aber auch ähnlich und in ähnlicher Lage. Dies ergibt sich daraus, dass die Mittelpunkte dreier den beiden Kegelschnitten gemeinsamer Sehnen von verschiedener Richtung zusammenfallen, und dass somit die zwischen die beiden Kegelschnitte fallenden Stücke dieser Sehnen gleich lang sind. Es soll dieses für zwei zusammengehörige Kegelschnitte der beiden ersten Schaaren dargetan werden. Es ist die Mitte der Sehne $J_1' N_1''$, welche die andere Curve in $A_m G_{m1}$ trifft, ausgedrückt durch

$$\frac{1}{2}[2a^m A + (b^m + c^m)B + (b^m + c^m)C]$$

dies ist aber, wie man sofort sieht, auch die Mitte von $A_m G_{m1}$. Ebenso erhält man sowol für die Mitte von $L_1'' N_1'$ als auch für jene von $B_m G_{m1}$ den Ausdruck

$$\frac{1}{2}[(a^m + c^m)A + 2b^m B + (a^m + c^m)C]$$

Endlich ergibt sich sowol für die Mitte von $L_1' M_1''$ als für die Mitte von $C_m G_{m1}$ der Ausdruck

$$\frac{1}{2}[(a^m + b^m)A + (a^m + b^m)B + 2c^m C]$$

Die nämlichen Betrachtungen aber führen bei den beiden anderen Kegelschnittschaaren zu denselben Resultaten.

Kempten (Bayern).

Ueber Kegelschnitte, die zu dem verallgemeinerten Brocard'schen Dreiecke in Beziehung stehen.

Von

Andreas Müller.

I.

Es wurde früher gezeigt, dass, wenn man die Seiten eines Dreiecks ABC mit den Eckpunkten des Brocard'schen Dreiecks $A_mB_mC_m$ verbindet, je drei sich entsprechende Verbindungsgerade sich in demselben Punkte schneiden. Derselben Erscheinung begegnen wir nun wieder, wenn wir die Seiten des Dreiecks $A_mB_mC_m$ in demselben Verhältnisse teilen und die Teilpunkte mit den Ecken des Coordinatendreiecks verbinden, so dass wir die drei Sätze erhalten:

Teilt man die Seiten des Dreiecks $A_mB_mC_m$ im nämlichen Verhältnisse und verbindet die Teilpunkte

1. auf B_mC_m mit A , auf C_mA_m mit B , auf A_mB_m mit C ,
2. auf B_mC_m mit B , auf C_mA_m mit C , auf A_mB_m mit A ,
3. auf B_mC_m mit C , auf C_mA_m mit A , auf A_mB_m mit B ,

so schneiden sich je drei zusammengehörige Verbindungsgerade in demselben Punkte. Der geometrische Ort dieser Schnittpunkte ist in drei Fällen für jedes m eine Hyperbel, so dass wir drei neue Hyperbelscharen erhalten, welche dem Coordinatendreieck umschrieben sind und welche mit H_β bezeichnet sein mögen, nm sie von den früher behandelten Kegelschnitten zu unterscheiden, welche durch Verbin-

dung homologer Punkte auf den Seiten des Dreiecks ABC mit den Punkten $A_m B_m C_m$ entstehen und welche mit H_a bezeichnet seien. Den Beweis für die oben angeführten Behauptungen, dessen Gang in allen drei Fällen der nämliche ist, werden wir auf den ersten derselben beschränken dürfen.

Ein Punkt nun, welcher die Strecke $B_m C_m$ im Verhältniss $q : p$ teilt, hat den Ausdruck

$$T_a \equiv (pc^m + qb^m) A + (pb^m + qa^m) B + (pa^m + qc^m) C$$

ebenso ergeben sich die Ausdrücke für die Teilpunkte auf $C_m A_m$ und $A_m B_m$

$$T_b \equiv (pb^m + qa^m) A + (pa^m + qc^m) B + (pc^m + qb^m) C$$

$$T_c \equiv (pa^m + qc^m) A + (pc^m + qb^m) B + (pb^m + qa^m) C$$

Da der erste Teilpunkt mit A , der zweite mit B , der dritte mit C verbunden wird, so beweist das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & -(pa^m + qc^m) & pb^m + qa^m \\ pc^m + qb^m & 0 & -(pb^m + qa^m) \\ -(pc^m + qb^m) & pa^m + qc^m & 0 \end{vmatrix} = 0$$

dass die drei Verbindungsgeraden durch denselben Punkt gehen. Für den Schnittpunkt selbst erhalten wir aus der Determinante den Ausdruck

$$Y_1 \equiv \frac{1}{pc^m + qb^m} A + \frac{1}{pa^m + qc^m} B + \frac{1}{pb^m + qa^m} C$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $p = 0$, so wird

$$Y_1 \equiv \frac{1}{b^m} A + \frac{1}{c^m} B + \frac{1}{a^m} C \equiv O_m$$

Setzt man $q = 0$, so wird

$$Y_1 \equiv \frac{1}{c^m} A + \frac{1}{a^m} B + \frac{1}{b^m} C \equiv O_m'$$

Setzt man $p = q$, so wird

$$Y_1 \equiv \frac{1}{b^m + c^m} A + \frac{1}{a^m + c^m} B + \frac{1}{b^m + a^m} C \equiv S'_{m1}$$

Setzt man $p + q = 0$, so wird

$$Y_1 \equiv \frac{1}{b^m - c^m} A + \frac{1}{c^m - a^m} B + \frac{1}{a^m - b^m} C \equiv P_{m1}'$$

Wir bestimmen nun, um zu zeigen, dass alle Punkte Y auf einem Kegelschnitte liegen, welcher dem Coordinatendreiecke umschrieben ist, die Constanten eines solchen mit Rücksicht darauf, dass derselbe durch die Punkte O_m und O_m' geht. Wir erhalten dann, wenn diese Constanten mit f, g, h bezeichnet werden, die beiden Gleichungen

$$b^m f + c^m g + a^m h = 0$$

$$c^m f + a^m g + b^m h = 0$$

Daraus ergibt sich

$$f : g : h = (b^m c^m - a^{2m}) : (a^m c^m - b^{2m}) : (a^m b^m - c^{2m})$$

oder, wenn wir uns der früher schon gebrauchten Abkürzung bedienen,

$$f : g : h = \alpha_m : \gamma_m : \beta_m$$

Sollen nun die Punkte Y , deren Ausdruck oben abgeleitet wurde, auf diesem Kegelschnitte liegen, so muss die Gleichung erfüllt sein

$$\alpha_m (p c^m + q b^m) + \gamma_m (p a^m + q c^m) + \beta_m (p b^m + q a^m) = 0$$

Dies ist aber der Fall, wie man auf Grund der Determinante Δ_m erkennt, da jeder der mit p und q multiplicirten Factoren für sich null ist, wenn man einerseits die mit p , anderseits die mit q multiplicirten Glieder zusammengefasst denkt.

Der Mittelpunkt dieses Kegelschnitts H_{m1} ist gegeben durch den Ausdruck

$$H_{m1} \equiv \alpha_m d_\alpha A + \gamma_m d_\gamma B + \beta_m d_\beta C$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$\beta_m + \gamma_m - \alpha_m = d_\alpha, \quad \alpha_m + \beta_m - \gamma_m = d_\gamma, \quad \alpha_m + \gamma_m - \beta_m = d_\beta$$

Um endlich zu zeigen, dass der in Betracht kommende Kegelschnitt eine Hyperbel ist, müssten wir den Ausdruck

$$\alpha_m^2 + \beta_m^2 + \gamma_m^2 - 2(\alpha_m \beta_m + \alpha_m \gamma_m + \beta_m \gamma_m)$$

discutiren und von demselben dartun, dass er grösser ist als null. Da aber im vorliegenden Falle die Punkte O_m und O_m' auf dem Kegelschnitte liegen, diese aber innerhalb des Coordinatendreiecks, welchem der Kegelschnitt umschrieben ist, sich befinden, so können wir uns einfach auf den Satz stützen¹⁾: Wenn von vier Punkten in einer Ebene der eine innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks liegt, so können durch sie weder Ellipsen noch Parabeln, sondern bloss Hyperbeln geführt werden.

Was nun noch die Hyperbeln angeht, welche auf die oben unter 2. und 3. angegebene Weise entstehen, so sind die auf denselben liegenden Punkte gegeben durch die Ausdrücke

$$Y_2 \equiv \frac{1}{pa^m + qc^m} A + \frac{1}{pb^m + qa^m} B + \frac{1}{pc^m + qb^m} C$$

$$Y_3 \equiv \frac{1}{pb^m + qa^m} A + \frac{1}{pc^m + qb^m} B + \frac{1}{pa^m + qc^m} C$$

Für $p = 0$ wird

$$Y_2 \equiv \frac{1}{c^m} A + \frac{1}{a^m} B + \frac{1}{b^m} C \equiv O_m'$$

$$Y_3 \equiv \frac{1}{a^m} A + \frac{1}{b^m} B + \frac{1}{c^m} C \equiv G_{-m}$$

Für $q = 0$ wird

$$Y_2 \equiv \frac{1}{a^m} A + \frac{1}{b^m} B + \frac{1}{c^m} C \equiv G_{-m}$$

$$Y_3 \equiv \frac{1}{b^m} A + \frac{1}{c^m} B + \frac{1}{a^m} C \equiv O_m$$

Für $p = q$ wird

$$Y_2 \equiv \frac{1}{a^m + c^m} A + \frac{b}{b^m + a^m} B + \frac{1}{c^m + b^m} C = S_{m,1}'$$

$$Y_3 \equiv \frac{1}{b^m + a^m} A + \frac{1}{c^m + b^m} B + \frac{1}{a^m + c^m} C = S_{m,2}'$$

Für $p + q = 0$ wird

$$Y_2 \equiv \frac{1}{a^m - c^m} A + \frac{1}{b^m - a^m} B + \frac{1}{c^m - b^m} C \equiv P_{m,1}'$$

$$Y_3 \equiv \frac{1}{b^m - a^m} A + \frac{1}{c^m - b^m} B + \frac{1}{a^m - c^m} C \equiv P_{m,2}'$$

Die Constanten für $H_{\beta 1}$ und $H_{\beta 2}$ sind bestimmt durch

$$f : g : h = \gamma_m : \beta_m : \alpha_m$$

und

$$f : g : h = \beta_m : \alpha_m : \gamma_m$$

Die Mittelpunkte also durch

$$H_{m2} \equiv \gamma_m d_\gamma A + \beta_m d_\beta B + \alpha_m d_\alpha C$$

$$H_{m3} \equiv \beta_m d_\beta A + \alpha_m d_\alpha B + \gamma_m d_\gamma C$$

II.

1. Sind A' , B' , C' die Mitten der Seiten des Coordinatendreiecks, haben A_m , B_m , C_m die frühere Bedeutung, und verbindet man A' mit A_m , B' mit B_m , C' mit C_m , teilt diese Strecken in demselben Verhältniss und verbindet diese Teilpunkte auf $A'A_m$ mit A , auf $B'B_m$ mit B , auf $C'C_m$ mit C , so schneiden sich je drei zusammengehörige Verbindungsgerade in demselben Punkte, der Ort aller dieser Schnittpunkte ist eine Hyperbel.

2. Verbindet man A' mit C_m , B' mit A_m , C' mit B_m und teilt die Verbindungsstrecken in demselben Verhältniss, so schneiden sich ebenso je drei zusammengehörige Verbindungsgerade in demselben Punkte, und auch diese Punkte liegen auf einer Hyperbel.

3. Verbindet man endlich A' mit B_m , B' mit C_m , C' mit A_m durch Gerade, teilt diese Strecken in demselben Verhältniss und verbindet die Teilpunkte auf $A'B_m$ mit A , auf $B'C_m$ mit B , auf $C'A_m$ mit C , so schneiden sich wie vorhin je drei der Verbindungsgeraden in einem Punkte, und die verschiedenen so erhaltenen Schnittpunkte liegen auf einer dritten Hyperbel.

Der Beweis für diese Behauptungen, dessen Gang in den drei Fällen der nämliche ist, soll hier für den dritten derselben erbracht werden. Wir teilen die Strecken $A'B_m$, $B'C_m$, $C'A_m$ in dem Verhältniss $q : p$, nennen die Teilpunkte bzhw. T_a , T_b , T_c , und stellen zunächst die Ausdrücke für diese Teilpunkte fest. Nun ist aber

$$T_a = \frac{1}{p+q} \left(q B_m + p \frac{B+C}{2} \right)$$

also

$$T_a = \frac{1}{p+q} \left[q \frac{c^m A + b^m B + a^m C}{\Sigma} + p \frac{B+C}{2} \right]$$

oder

$$T_a \equiv 2 q c^m A + (2 q b^m + p \Sigma) B + (2 q a^m + p \Sigma) C$$

Ebenso wird

$$T_b \equiv (2 q b^m + p \Sigma) A + 2 q a^m B + (2 q c^m + p \Sigma) C$$

$$T_c \equiv (2 q a^m + p \Sigma) A + (2 q c^m + p \Sigma) B + 2 q b^m C$$

In diesen Ausdrücken ist zur Abkürzung

$$\Sigma = a^m + b^m + c^m$$

gesetzt. Denkt man sich nun den ersten Punkt mit A , den zweiten mit B , den dritten mit C verbunden, so erhält für diesen Fall die Determinante (Formel 3) folgende Form

$$\begin{vmatrix} 0 & -(2qa^m + p\Sigma) & 2qb^m + p\Sigma \\ 2qc^m + p\Sigma & 0 & -(2qb^m + p\Sigma) \\ -(2qc^m + p\Sigma) & 2qa^m + p\Sigma & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Dieselbe verschwindet, wie man nach Addition der Reihen sofort erkennt, und lässt somit ersehen, dass in der Tat die drei Verbindungsgeraden durch denselben Punkt gehen.

Man erhält aus dieser Determinante das Verhältniss der Coordinaten eines Schnittpunktes:

$$x_1 : x_2 : x_3 = (2qa^m + p\Sigma)(2qb^m + p\Sigma) : (2qb^m + p\Sigma)(2qc^m + p\Sigma) : (2qc^m + p\Sigma)(2qa^m + p\Sigma)$$

Setzen wir in diesem Ausdrucke, um einige Punkte näher kennen zu lernen, zunächst $p = 0$, so wird der Schnittpunkt

$$Y_3 \equiv a^m b^m A + b^m c^m B + c^m a^m C$$

dies ist aber der Punkt O_m' . Setzen wir $q = 0$, so wird

$$Y_3 \equiv A + B + C$$

dies ist der Punkt G_0 . Setzen wir ferner $q = -p$, so wird

$$Y_3 \equiv \delta_a \cdot \delta_b A + \delta_b \cdot \delta_c B + \delta_c \cdot \delta_a C$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$b^m + c^m - a^m = \delta_a, \quad a^m + c^m - b^m = \delta_b, \quad a^m + b^m - c^m = \delta_c$$

Dieser Punkt soll mit M_{m3}' bezeichnet werden. Setzen wir $p = -2q$, so wird

$$Y_3 \equiv (b^m + c^m)(a^m + c^m)A + (a^m + c^m)(a^m + b^m)B + (a^m + b^m)(b^m + c^m)C$$

oder

$$Y_3 \equiv \frac{1}{a^m + b^m} A + \frac{1}{b^m + c^m} B + \frac{1}{a^m + c^m} C$$

dieser Punkt ist oben mit S_{m3}' bezeichnet worden. Setzen wir endlich $p = q$, so wird

$$Y \equiv (3a^m + b^m + c^m)(a^m + 3b^m + c^m)A + (a^m + 3b^m + c^m)(a^m + b^m + 3c^m)B + (a^m + b^m + 3c^m)(3a^m + b^m + c^m)C$$

oder

$$Y = \frac{1}{a^m + b^m + 3c^m} A + \frac{1}{3a^m + b^m + c^m} B + \frac{1}{a^m + 3b^m + c^m} C$$

dieser Punkt soll mit R_{m3}' bezeichnet werden.

Aus dem Ausdrucke für den Schnittpunkt dreier hier in Betracht kommenden Geraden:

$$Y \equiv (2qa^m + p\Sigma)(2qb^m + p\Sigma)A + (2qb^m + p\Sigma)(2qc^m + p\Sigma)B \\ + (2qc^m + p\Sigma)(2qa^m + p\Sigma)C$$

ersieht man, dass die für dasselbe m und verschiedene p und q erhaltenen Schnittpunkte auf einem Kegelschnitte liegen. Dieser Kegelschnitt ist dem Coordinatendreieck ABC umschrieben. Um uns davon zu überzeugen, bestimmen wir mit Rücksicht darauf, dass auf dem Kegelschnitte die Punkte G_0 und O_m' liegen, die Constanten f , g und h . Wir erhalten zu diesem Zwecke die beiden Gleichungen

$$f + g + h = 0 \\ c^m f + a^m g + b^m h = 0$$

Daraus wird

$$f : g : h = (b^m - a^m) : (c^m - b^m) : (a^m - c^m)$$

Soll nun irgend ein anderer Schnittpunkt mit den Coordinaten x_1 , x_2 , x_3 auf dem durch die fünf Punkte A , B , C , G_0 und O_m' bestimmten Kegelschnitte liegen, so muss wieder sein

$$\frac{f}{x_1} + \frac{g}{x_2} + \frac{h}{x_3} = 0$$

Im vorliegenden Falle erhält man aber

$$(b^m - a^m)(2qc^m + p\Sigma) + (c^m - b^m)(2qa^m + p\Sigma) \\ + (a^m - c^m)(2qb^m + p\Sigma) = 0$$

was sofort ersichtlich ist, mithin liegen alle oben gekennzeichneten Schnittpunkte auf jenem Kegelschnitte.

Dieser Kegelschnitt kann nach einem früher angeführten Satze nur eine Hyperbel sein, da er ja durch die Punkte A , B , C und G_0 geht, G_0 aber immer innerhalb des Dreiecks ABC liegt.

Es seien die hieher gehörigen Hyperbeln mit $H_{\gamma 3}$ bezeichnet, dann sind die Ausdrücke für die Punkte auf $H_{\gamma 1}$ und $H_{\gamma 2}$ bzhw.

$$Y_1 \equiv \frac{1}{2qa^m + p\Sigma} A + \frac{1}{2qb^m + p\Sigma} B + \frac{1}{2qc^m + p\Sigma} C \\ Y_2 = \frac{1}{2qb^m + p\Sigma} A + \frac{1}{2qc^m + p\Sigma} B + \frac{1}{2qa^m + p\Sigma} C$$

Daraus ergibt sich für $p = 0$

$$Y_1 = G_{-m}, \quad Y_2 = O_m$$

Für $p = q$ erhält man

$$Y_1 = R_{m1}' \quad Y_2 = R_{m2}'$$

Für $p + q = 0$ wird

$$Y_1 = M_{m1}', \quad Y_2 = M_{m2}'$$

Für $p + 2q = 0$ wird

$$Y_1 = S_{m1}', \quad Y_2 = S_{m2}'$$

III.

Bezeichnen A', B', C' bzw. die Mitten der Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC und ebenso A_m', B_m', C_m' die Mitten der Seiten $B_m C_m, C_m A_m, A_m B_m$ des Dreiecks $A_m B_m C_m$, so lassen sich folgende Sätze aussprechen:

1. Verbindet man A' mit A_m' , B' mit B_m' , C' mit C_m' , teilt diese Strecken in demselben Verhältniss und verbindet den Teilpunkt auf $A'A_m'$ mit A , auf $B'B_m'$ mit B , auf $C'C_m'$ mit C , so schneiden sich je drei solcher Verbindungsgesaden in dem nämlichen Punkte, und die für das dasselbe m auf die angegebene Art erhaltenen Punkte liegen auf einer Hyperbel.

2. Teilt man die Strecke $A'C_m'$, $B'A_m'$, $C'B_m'$ in demselben Verhältniss und verbindet den Teilpunkt auf $A'C_m'$ mit A , auf $B'A_m'$ mit B , auf $C'B_m'$ mit C , so schneiden sich wieder je drei solcher Verbindungsgeraden in demselben Punkte und der Ort der Schnittpunkte ist eine Hyperbel.

3. Teilt man endlich die Strecken $A'B_m'$, $B'C_m'$, $C'A_m'$ in demselben Verhältniss, verbindet den ersten Teilpunkt mit A , den zweiten mit B , den dritten mit C , so schneiden sich die drei Geraden in demselben Punkte, und alle so erhaltenen Schnittpunkte liegen auf einer Hyperbel.

Der Beweis, dessen Gang in den drei Fällen der nämliche ist, soll hier wieder für den dritten derselben erbracht werden.

Es ist

$$A' = \frac{B + C}{2}$$

und

$$B_m' = \frac{(a^m + b^m)A + (a^m + c^m)B + (b^m + c^m)C}{2\Sigma}$$

Teilt man nun die Strecke $A'B_m'$ im Verhältniss von $q:p$, so erhält man für den Teilpunkt

$$T_a = \frac{1}{p+q} \left[p \left(\frac{B+C}{2} \right) + \frac{q((a^m+b^m)A + (a^m+c^m)B + (b^m+c^m)C)}{2\Sigma} \right]$$

oder

$$T_a \equiv q(a^m+b^m)A + (p\Sigma + q(a^m+c^m))B + (p\Sigma + q(b^m+c^m))C$$

Ebenso erhält man für der Teilpunkt T_b der Strecke $B'C_m'$

$$T_b \equiv (p\Sigma + q(a^m+c^m))A + q(b^m+c^m)B + (p\Sigma + q(a^m+b^m))C$$

und endlich für den Teilpunkt T_c auf der Strecke $C'A_m'$

$$T_c \equiv (p\Sigma + q(b^m+c^m))A + (p\Sigma + q(a^m+b^m))B + q(a^m+c^m)C$$

Da nun aber der erste Teilpunkt mit A , der zweite mit B , der dritte mit C verbunden wird, so muss die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & -(p\Sigma + q(b^m+c^m)) & p\Sigma + q(a^m+c^m) \\ p\Sigma + q(a^m+b^m) & 0 & -(p\Sigma + q(a^m+c^m)) \\ -(p\Sigma + q(a^m+b^m)) & p\Sigma + q(b^m+c^m) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sein, was in der Tat der Fall ist, wie nach Addition der Reihen sofort ersichtlich wird.

Für die Coordinaten eines solchen Schnittpunktes Y der Geraden AT_a , BT_b , CT_c erhält man aus der Determinante:

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= (p\Sigma + q(a^m+c^m))(p\Sigma + q(b^m+c^m)) \\ &: (p\Sigma + q(a^m+c^m))(p\Sigma + q(a^m+b^m)) \\ &: (p\Sigma + q(a^m+b^m))(p\Sigma + q(b^m+c^m)) \end{aligned}$$

Setzt man nun, um einige dieser Punkte näher kennen zu lernen, $q = 0$, so wird

$$Y_3 = \frac{A+B+C}{3}$$

dies ist aber der Schwerpunkt G_0 , wie zu erwarten stand.

Setzt man $p = 0$, so wird

$$Y_3 = \frac{1}{a^m+b^m}A + \frac{1}{b^m+c^m}B + \frac{1}{a^m+c^m}C$$

Dies ist aber der Punkt, welcher oben mit S_{m3}' bezeichnet wurde, Es gehen also durch diesen Punkt die Geraden, welche die Ecken des Coordinatendreiecks mit den Seitenmitten des Dreiecks $A_mB_mC_m$ verbinden, d. i. die Geraden AB_m' , BC_m' , CA_m' , wie wir soeben erkannten; in diesem Punkte schneiden sich noch drei Gerade, wie

schon früher dargetan wurde. Wenn man nämlich die Geraden $A'B_m$, $B'C_m$, $C'A_m$ um ihre eigene Grösse nach entgegengesetzter Richtung verlängert und die so erhaltenen Punkte mit A , B , C bzw. verbindet, so schneiden sich diese Geraden gleichfalls im Punkte S_{m3}' . Daraus wird ersichtlich, dass je zwei der genannten Geraden zusammenfallen, und dass also je vier der oben genannten Punkte in gerader Linie liegen, z. B. die Punkte B , S_{m3}' , C_m' und der oben näher gezeichnete Punkt auf $B'C_m$.

Setzt man ferner $p = q$, so wird

$$Y \equiv (2a^m + b^m + 2c^m)(a^m + 2b^m + 2c^m)A \\ + (2a^m + b^m + 2c^m)(2a^m + 2b^m + c^m)B \\ + (2a^m + 2b^m + c^m)(a^m + 2b^m + 2c^m)C$$

oder

$$Y_3 \equiv \frac{1}{2a^m + 2b^m + c^m} A + \frac{1}{a^m + 2b^m + 2c^m} B + \frac{1}{2a^m + b^m + 2c^m} C$$

dieser Punkt soll mit D_{m3}' bezeichnet werden.

Setzt man $q = -p$, so wird

$$Y_3 \equiv a^m b^m . A + b^m c^m . B + a^m c^m . C$$

oder

$$Y_3 \equiv \frac{1}{c^m} A + \frac{1}{a^m} B + \frac{1}{b^m} C$$

dies ist aber der Punkt O_m' . Es gehen also die Geraden, welche man durch die Eckpunkte A , B , C des Coordinatendreiecks parallel zieht bzw. zu den Geraden $A'B_m'$, $B'C_m'$, $C'A_m'$, durch den Punkt O_m' . Da aber auf der Geraden AO_m' auch der Punkt B_m , auf BO_m' auch C_m , auf CO_m' auch A_m liegt, so finden wir, dass $AB_m \parallel A'B_m'$, $BC_m \parallel B'C_m'$, $CA_m \parallel C'A_m'$ ist.

Setzt man ferner $q = -2p$, so wird

$$Y_3 \equiv \delta_a \delta_b A + \delta_b \delta_c B + \delta_c \delta_a C$$

oder

$$Y_3 \equiv \frac{1}{\delta_c} A + \frac{1}{\delta_a} B + \frac{1}{\delta_b} C$$

wenn δ_a , δ_b , δ_c die früher gebrauchten Abkürzungen bezeichnen. Dies ist aber der Punkt M_{m3}' . Wenn man also die Strecken $A'B_m'$, $B'C_m'$, $C'A_m'$ über B_m' , C_m' , A_m' hinaus bzw. je um die eigene Grösse verlängert und die betr. Punkte, welche mit $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{C}_3$ bezeichnet werden mögen, mit A , B , C verbindet, so schneiden sich die letzten drei Verbindungslinien im Punkte M_{m3}' . Wir haben aber

früher gefunden, dass die Gerade $AM_{m3}' \parallel A'B_m$, $BM_{m3}' \parallel B'C_m$ und $CM_{m3}' \parallel C'A_m$, und soeben hatten wir erkannt, dass $AB_m \parallel A'B_m'$. Wir stossen also durch die Verlängerung von $A'B_m'$ um die eigene Grösse über B_m' hinaus auf den vierten Eckpunkt eines Parallelogrammes, dessen andere Ecken A , B_m und A' sind, und dessen eine Seite im Punkte B_m' halbiert erscheint. Ebenso sind die Figuren $BC_m B' \mathfrak{B}_3$ und $CA_m C' \mathfrak{C}_3$ Parallelogramme. Ferner ist ersichtlich, dass $A'B_m' = \frac{1}{2}AB_m$ und $B'C_m' = \frac{1}{2}BC_m$ und $C'A_m' = \frac{1}{2}CA_m$. Da ferner $A'\mathfrak{U}_3$ und $A_m C_m$ sich in B_m' gegenseitig halbiren, so ist auch die Figur $A'A_m \mathfrak{U}_3 C_m$ ein Parallelogramm, und aus dem gleichen Grunde sind auch die Vierecke $B'B_m \mathfrak{B}_3 A_m$ und $C'C_m \mathfrak{C}_3 B_m$ Parallelogramme.

Setzt man endlich $q = -\frac{2}{3}p$, so wird

$$Y_3 \equiv (3a^m + b^m + c^m)(a^m + 3b^m + c^m)A \\ + (a^m + 3b^m + c^m)(a^m + b^m + 3c^m)B \\ + (a^m + b^m + 3c^m)(3a^m + b^m + c^m)C$$

oder

$$Y_3 \equiv \frac{1}{a^m + b^m + 3c^m} A + \frac{1}{3a^m + b^m + c^m} B + \frac{1}{a^m + 3b^m + c^m} C$$

Dies ist aber der Punkt, den wir oben mit R_{m3}' bezeichnet haben. Wir erkannten damals, dass in diesem Punkte die Geraden, welche von A nach der Mitte von $A'B_m$, von B nach der Mitte von $B'C_m$ und von C nach der Mitte von $C'A_m$ gezogen werden, sich treffen. Aus dem aber, was wir soeben fanden, ergibt sich, dass, wenn man die Geraden $A'B_m'$, $B'C_m'$, $C'A_m'$ über A' , B' , C' hinaus um die zweifache Grösse dieser Strecken verlängert und die so erhaltenen Teilpunkte λ , μ , ν mit A , B , C bzhw. verbindet, diese Geraden ebenfalls durch den Punkt R_{m3}' gehen. Es liegen mithin auf der Geraden AR_{m3} die Mitte von $A'B_m$ und der Punkt λ der Gerade $A'B_m'$, ebenso liegen auf BR_{m3}' die Mitte von $B'C_m$ und der Punkt μ auf $B'C_m'$, endlich liegen auf CR_{m3}' die Mitte von $C'A_m$ und der Punkt ν auf $C'A_m'$.

Der Ausdruck für einen Schnittpunkt

$$Y_3 \equiv (p\Sigma + q(a^m + c^m))(p\Sigma + q(b^m + c^m))A \\ + (p\Sigma + q(a^m + c^m))(p\Sigma + q(a^m + b^m))B \\ + (p\Sigma + q(a^m + b^m))(p\Sigma + q(b^m + c^m))C$$

lässt erkennen, dass alle für dasselbe m und variable p und q erhaltenen Schnittpunkte auf einem Kegelschnitte liegen. Bedenken wir nun, dass auf diesem Kegelschnitte die Punkte G_0 , O_m' , S_{m3}' und R_{m3}' liegen, so ist ersichtlich, dass derselbe identisch sein muss mit der früher gefundenen Hyperbel $H_{,3}$, welche entsteht, wenn man

die Strecken $A'B_m$, $B'C_m$, $C'A_m$ in demselben Verhältniss teilt und die Teilpunkte mit A , B , C bzw. verbindet. Dass dies in der Tat der Fall ist, ersehen wir auch aus der Gleichung

$$(b^m - a^m)(p\Sigma + q(a^m + b^m)) + (c^m - b^m)(p\Sigma + q(b^m + c^m)) + (a^m - c^m)(p\Sigma + q(a^m + c^m)) = 0$$

Nun ist aber auch klar, dass die Eigenschaft, welche soeben von den Strahlen AR_{m3}' , BR_{m3}' , CR_{m3}' und früher von den Strahlen AS_{m3}' , BS_{m3}' , CS_{m3}' hervorgehoben wurde, von allen Strahlen gelten muss, welche irgend einen Punkt C der Hyperbel $H_{\gamma 3}$ mit den Ecken des Coordinatendreiecks verbinden. So sei der Punkt X der Hyperbel mit A , B und C verbunden, und es schneide AX die Gerade $A'B_m$ in λ und $A'B_{m'}$ in λ_1 , ferner BX die Gerade $B'C_m$ in μ und $B'C_{m'}$ in μ_1 , endlich CX die Gerade $C'A_m$ in ν und $C'A_{m'}$ in ν_1 , dann hat man

$$A'\lambda : B_m\lambda = B_{\mu}' : C_m\mu = C_{\nu}' : A_m\nu$$

und

$$A'\lambda_1 : B_{m'}\lambda_1 = B_{\mu_1}' : C_{m'}\mu_1 = C_{\nu_1}' : A_{m'}\nu_1$$

Um nach dieser Richtung noch einen Fall besonders zu untersuchen, ziehen wir von A , B , C die Strahlen nach dem oben mit D_{m3}' bezeichneten Punkte. Diese Strahlen halbiren, wie oben erkannt wurde, die Geraden $A'B_{m'}$, $B'C_{m'}$, $C'A_{m'}$. Um nun zu erkennen, in welchem Verhältniss die Strecken $A'B_m$, $B'C_m$, $C'A_m$ durch die Strahlen AD_{m3}' etc. geteilt werden, dürfen wir nur den Ausdruck

$$D_{m3}' \equiv \frac{1}{2a^m + 2b^m + c^m} A + \frac{1}{a^m + 2b^m + 2c^m} B + \frac{1}{2a^m + b^m + 2c^m} C$$

aus dem allgemeinen Ausdrucke, welcher sich für die Teilung der Strecken $A'B_m$, $B'C_m$, $C'A_m$ nach demselben Verhältniss ergeben hatte, ableiten. Man muss aber in dem Ausdrucke

$$Y_3 \equiv \frac{1}{2qc^m + p\Sigma} A + \frac{1}{2qa^m + p\Sigma} B + \frac{1}{2qb^m + p\Sigma} C$$

$q = -\frac{1}{4}p$ setzen, um den Ausdruck für D_{m3}' zu erhalten. Mithin muss man die Strecken $A'B_m$, $B'C_m$, $C'A_m$ um ein Drittel der eigenen Grösse über A' , B' , C' bzw. hinaus verlängern, dann fallen diese Teilpunkte bezüglich auf die Geraden AD_{m3}' , BD_{m3}' , CD_{m3}' .

Was den Mittelpunkt der fraglichen Hyperbel angeht, so findet sich derselbe auf dem schon mehrfach betretenen Wege aus den oben abgeleiteten Constanten. Bezeichnen wir denselben mit W_{m3} , so wird

$$W_{m3} \equiv (a^m - b^m)^2 A + (b^m - c^m)^2 B + (c^m - a^m)^2 C$$

Man erkennt sofort, dass dieser Punkt auf der Geraden $M_{m3} G_{2m3}$ liegt, denn es ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} (a^m - b^m)^2, & (b^m - c^m)^2, & (c^m - a^m)^2 \\ c^{2m} - (a^m - b^m)^2, & a^{2m} - (b^m - c^m)^2, & b^{2m} - (c^m - a^m)^2 \\ c^{2m} & a^{2m} & b^{2m} \end{vmatrix} = 0$$

wie sich sofort ergibt, wenn man die zweite Reihe zur ersten addirt, die dritte davon subtrahirt.

Um nun an die vorstehenden Erörterungen noch einige weitere Bemerkungen knüpfen zu können, soll zunächst ein Satz, dessen Geltung für die Winkelgegenpunkte bekannt und für die Gegenpunkte im weiteren Sinne von mir anderwärts erwiesen wurde, hier noch eine weitere Ausdehnung erfahren.

Durchläuft nämlich ein Punkt eine gerade Linie, und man bildet die Coordinaten eines zweiten Punktes aus denen des ersten so, dass man die reciproken Werte der ersteren mit einem beliebigen Factor multiplicirt, so durchläuft der zweite Punkt einen Kegelschnitt, welcher dem Coordinatendreieck umschrieben ist.

Geht nämlich die Gerade, welche der erste Punkt durchläuft, durch die beiden Punkte

$$P_1 \equiv a_1 A + b_1 B + c_1 C$$

und

$$P_2 \equiv a_2 A + b_2 B + c_2 C$$

so müssen, wie wir wissen, die Coordinaten x_1, x_2, x_3 eines dritten Punktes auf jener Geraden der Gleichung genügen

$$1) \quad x_1 \alpha + x_2 \beta + x_3 \gamma = 0$$

worin α, β und γ selbstverständliche Abkürzungen bezeichnen. Soll ferner ein Punkt mit den Coordinaten x_1', x_2', x_3' auf einem Kegelschnitte liegen, welcher dem Coordinatendreieck umschrieben ist, so müssen seine Coordinaten der Gleichung genügen:

$$2) \quad \frac{f}{x_1'} + \frac{g}{x_2'} + \frac{h}{x_3'} = 0$$

worin f, g und h beliebig gewählt werden können. Bildet man nun jederzeit die x' aus den x so, dass man hat

$$3) \quad x_1' : x_2' : x_3' = \frac{s}{x_1} : \frac{t}{x_2} : \frac{u}{x_3}$$

und wählt man f , g und h so, dass man hat

$$f = s\alpha, \quad g = t\beta, \quad h = u\gamma$$

so geht nach Einsetzung dieser Werte in die linke Seite der Gleichung 2), diese in die linke Seite der Gleichung 1) über, und man hat

$$\frac{s\alpha x_2}{s} + \frac{t\beta x_2}{t} + \frac{u\gamma x_3}{u} = 0$$

so dass also in der That alle Punkte, deren Coordinaten x' in der oben angegebenen Weise gebildet sind, auf dem durch f , g und h bestimmten Kegelschnitte liegen.

Wählt man die Constanten des Kegelschnittes so, dass man hat

$$f : g : h = s : t : u$$

so geht die Gleichung 2) des Kegelschnittes über in

$$\frac{s}{x_1'} + \frac{t}{x_2'} + \frac{u}{x_3'} = 0$$

Bildet man nun aus den Coordinaten x' die Coordinaten x eines Punktes in der unter 3) angegebenen Weise, so geht die Gleichung 2) über in

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

dieser Punkt aber liegt im unendlichen. Es liegen daher alle Punkte, deren Coordinaten auf die gegebene Art aus den Coordinaten der Punkte, die auf dem Kegelschnitte mit den Constanten s , t , u liegen, gebildet sind, auf der unendlich entfernten Geraden. Diese Tatsache kann unter Umständen dazu dienen, sich über die Natur des der Geraden 1 entsprechenden Kegelschnittes mit den Constanten $s\alpha$, $t\beta$, $u\gamma$ näheren Aufschluss zu verschaffen. Wenn nämlich die Gerade 1 den Kegelschnitt

$$\frac{s}{x_1'} + \frac{t}{x_2'} + \frac{u}{x_3'} = 0$$

schneidet, so ist der Kegelschnitt

$$\frac{s\alpha}{x_1'} + \frac{t\beta}{x_2'} + \frac{u\gamma}{x_3'} = 0$$

eine Hyperbel; wenn jene Gerade den ersten Kegelschnitt berührt, ist der zweite eine Parabel; und wenn sie ausserhalb des ersten Kegelschnittes fällt, ist der zweite eine Ellipse. Das eben Gesagte

führt, wenn man den eingeschlagenen Weg noch einen Schritt weiter verfolgt, unmittelbar auf die oben angegebene Formel, welche für gewöhnlich über die Natur des Kegelschnittes Aufschluss bietet, deren Ableitung indes unterbleiben soll.

Wenn wir nun die gepflogene Erörterung auf den oben behandelten Kegelschnitt $H_{\gamma 3}$

$$\frac{a^m - b^m}{x_1} + \frac{b^m - c^m}{x_2} + \frac{c^m - a^m}{x_3} = 0$$

anwenden, so müssen zunächst die Punkte

$$G_{m3} \equiv c^m A + a^m B + b^m C$$

$$G_{2m3} \equiv c^{2m} A + a^{2m} B + b^{2m} C$$

$$S_{m3} \equiv c^m(a^m + b^m) A + a^m(b^m + c^m) B + b^m(a^m + c^m) C$$

$$M_{m3} \equiv c^m(a^m + b^m - c^m) A + a^m(b^m + c^m - a^m) B + b^m(a^m - b^m + c^m) C$$

$$R_{m3} \equiv c^m(a^m + b^m + 3c^m) A + a^m(3a^m + b^m + c^m) B + b^m(a^m + 3b^m + c^m) C$$

$$D_{m3} \equiv c^m(2a^m + 2b^m + c^m) A + a^m(a^m + 2b^m + 2c^m) B + b^m(2a^m + b^m + 2c^m) C$$

in gerader Linie liegen, da die Coordinaten derselben die reciproken Werte der Coordinaten von Punkten, die auf dem betr. Kegelschnitte liegen, darstellen, jede gleichnamige derselben multiplicirt mit dem nämlichen Factor.

Es ist aber G_{m3} der Schnittpunkt der durch A_m , B_m und C_m bzw. zu AB , BC und CA gezogenen Parallelen, ebenso G_{2m3} der Schnittpunkt der durch A_{2m} , B_{2m} , C_{2m} zu AB , BC und CA bzw. gezogenen Parallelen. S_{m3} ist die Mitte von $G_{-m}O$; M_{m3} ist der Schnittpunkt der durch A' , B' , C' zu AM_{m3}' , BM_{m3}' , CM_{m3}' bzw. gezogenen Parallelen. Die Richtigkeit der letzten Behauptung erkennt man daraus, dass die Determinante ¹⁾

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\delta_c \delta_a & \delta_c \delta_b \\ (a^m - b^m) \delta_c & c^m \delta_c & -c^m \delta_c \end{vmatrix} = 0$$

ist, wovon man sich überzeugt, wenn man die dritte Reihe zur zweiten addirt. Auf den Geraden $A'M_{m3}$, $B'M_{m3}$, $C'M_{m3}$ liegen auch bzw. die Punkte B_m , C_m und A_m . Ausserdem liegt M_{m3} auch auf der Geraden $M_{m3}'G_0$ und wird die Gerade $M_{m3}M_{m3}'$ durch G_0 so geteilt, dass man hat

1) Progr. des k. Gymn zu Kempten v. J. 1889. I 4 § 3.

$$M_{m3} G_0 : G_0 M_{m3}' = 1 : 2$$

Der Punkt G nämlich, welcher die Gerade $M_{m3} M_{m3}'$ im angegebenen Verhältniss teilt, ist gegeben durch

$$G = \frac{2M_{m3} + M_{m3}'}{3}$$

Da nun

$$M_{m3} = \frac{c^m \delta_c A + a^m \delta_a B + b^m \delta_b C}{K}$$

und

$$M_{m3}' = \frac{\delta_a \delta_b A + \delta_b \delta_c B + \delta_c \delta_a C}{K}$$

ist, wenn zur Abkürzung der Ausdruck

$$2(a^m b^m + a^m c^m + b^m c^m) - (a^{2m} + b^{2m} + c^{2m}) = K$$

gesetzt wird, so ist

$$G = \frac{KA + KB + KC}{3K} = G_0$$

Der Punkt M_{m3} ist auch, wie aus der Zusammensetzung seiner Coordinaten sogleich ersichtlich wird, der Mittelpunkt eines dem Coordinatendreieck umschriebenen Kegelschnittes, dessen Gleichung ist

$$\frac{c^m}{x_1} + \frac{a^m}{x_2} + \frac{b^m}{x_3} = 0$$

Bildet man zu diesem Kegelschnitte in derselben Weise die reciproke Gerade, wie dies oben von der Geraden $M_{m3} G_{m3}$ und dem Kegelschnitte $H_{\gamma 3}$ angegeben wurde, so wird dieselbe

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Wir könnten also aus der Lage der Geraden $M_{m3} G_{m3}$ gegen den Kegelschnitt M_{m3} die Natur des Kegelschnittes $H_{\gamma 3}$ erkennen. Da wir uns aber auf anderem Wege überzeugten, dass jener Kegelschnitt eine Hyperbel ist, so können wir daraus den Schluss ziehen, dass die Gerade $G_{m3} M_{m3}$ den Kegelschnitt M_{m3} in zwei reellen Punkten trifft, wie dies auch die Auflösung der beiden Gleichungen

$$a^m b^m (a^m - b^m) x_1 + b^m c^m (b^m - c^m) x_2 + c^m a^m (c^m - a^m) y_3 = 0$$

und

$$\frac{c^m}{x_1} + \frac{a^m}{x_2} + \frac{b^m}{x_3} = 0$$

deren erste die Gerade $G_{m3} M_{m3}$ darstellt, ergibt.

Der oben erwiesene Satz kann nun natürlich auch benutzt werden, um Punkte auf der Hyperbel H_3 , welche gewissen Punkten auf der Geraden G_{m3} M_{m3} entsprechen, kennen zu lernen. Bestimmen wir zunächst den unendlich fernen Punkt U_{m3} jener Geraden, so erhalten wir dessen Coordinaten aus den beiden Gleichungen

$$a^m b^m (\alpha^m - b^m) x_1 + b^m c^m (b^m - c^m) x_2 + c^m a^m (c^m - a^m) x_3 = 0$$

und

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Man erhält daraus

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= c^m [a^m (c^m - a^m) - b^m (b^m - c^m)] \\ &: a^m [b^m (a^m - b^m) - c^m (c^m - a^m)] \\ &: b^m [c^m (b^m - c^m) - a^m (a^m - b^m)] \end{aligned}$$

Nun muss der entsprechende Punkt U_{m3}' , dessen Coordinaten das Verhältniss

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= \frac{1}{a^m (c^m - a^m) - b^m (b^m - c^m)} : \frac{1}{b^m (a^m - b^m) - c^m (c^m - a^m)} \\ &: \frac{1}{c^m (b^m - c^m) - a^m (a^m - b^m)} \end{aligned}$$

haben, sowohl auf der Hyperbel H_3 als auch auf dem Kegelschnitte M_{m3} liegen, wovon man sich auch direct überzeugen kann.

Auf der Geraden M_{m3} G_{m3} liegt auch der Punkt

$$\begin{aligned} Z_{m3} &\equiv c^m [a^m (b^m + c^m) + b^m (a^m + c^m) - c^{2m}] A \\ &+ a^m [b^m (a^m + c^m) + c^m (a^m + b^m) - a^{2m}] B \\ &+ b^m [c^m (a^m + b^m) + a^m (b^m + c^m) - b^{2m}] C \end{aligned}$$

und zwar halbt derselbe die Strecke $M_{m3} G_{m3}$, mithin muss auch der Punkt

$$\begin{aligned} Z_{m3}' &\equiv \frac{1}{a^m (b^m + c^m) + b^m (a^m + c^m) - b^{2m}} A \\ &+ \frac{1}{b^m (a^m + c^m) + c^m (a^m + b^m) - a^{2m}} B \\ &+ \frac{1}{c^m (a^m + b^m) + a^m (b^m + c^m) - b^{2m}} C \end{aligned}$$

auf der Hyperbel H_3 liegen, was sich wieder leicht verificiren lässt.

Zum Schlusse dieses Abschnittes möge noch erwähnt werden, dass für den eingangs unter 1. aufgeführten Fall an Stelle des auf der Hyperbel H_3 liegenden Punktes O_m' der Punkt G_{-m} , im Falle 2. der Punkt O_m tritt, dass ferner der Punkt S_{m1} die Strecke $O_m O_m'$

und der Punkt S_{m2} die Strecke $G_{-m}O_m'$ halbiert. Ferner ist im Falle 1. und für $m = 2$ die erwähnte Hyperbel identisch mit der sogenannten Hyperbel der neun Punkte, welche von Brocard als Hyperbel I bezeichnet wurde.

Wie man sieht, müssten, wenn man überhaupt, nachdem dieselbe als geometrischer Ort erkannt ist, noch besondere Punkte auf derselben hervorheben will, auch noch die beiden Punkte D_{21}' und R_{21}' erwähnt werden.

IV.

Zu jedem der in den beiden vorhergehenden Abschnitten behandelten Fällen ergeben sich Seitenstücke, wenn man die beiden Dreiecke ABC und $A_mB_mC_m$ vertauscht denkt. Wie dort, so wären auch hier wieder je drei Fälle zu unterscheiden. Es wird genügen nur je den ersten derselben zu berücksichtigen. Verbinden wir nämlich A mit A_m' , B mit B_m' , C mit C_m' , teilen diese Strecken in demselben Verhältniss und verbinden den ersten Teilpunkt mit A_m , den zweiten mit B_m , den dritten mit C_m , so schneiden sich diese Geraden in demselben Punkte und der geometrische Ort aller für dasselbe m auf diese Weise erhaltenen Schnittpunkte ist eine Hyperbel, welche dem Dreieck $A_mB_mC_m$ umschrieben ist.

Es seien, um den Beweis zu führen, die Strecken AA_m' etc. im Verhältniss von $p : q$ geteilt, so erhält man für den Teilpunkt T_a auf der ersten Strecke

$$T_a = \frac{1}{p+q} \left(qA + p \frac{B_m + C_m}{2} \right)$$

oder, wenn für A_m und C_m die bekannten Werte gesetzt werden

$$T_a \equiv (2q\Sigma + p(b^m + c^m))A + p(a^m + b^m)B + p(a^m + c^m)C$$

Ebenso wird der Teilpunkt auf BB_m'

$$T_b \equiv p(a^m + b^m)A + (2q\Sigma + p(a^m + c^m))B + p(b^m + c^m)C$$

Endlich wird der Teilpunkt auf CC_m'

$$T_c \equiv p(a^m + c^m)A + p(b^m + c^m)B + (2q\Sigma + p(a^m + b^m))C$$

Sollen nun die drei Geraden, welche man erhält, wenn man den ersten Teilpunkt mit A_m , den zweiten mit B_m , den dritten mit C_m verbindet, durch denselben Punkt gehen, so muss die Determinante

$$\Sigma^3 \begin{vmatrix} p(c^m - b^m), & p(b^m - a^m) + 2qb^m, & p(a^m - c^m) - 2qc^m \\ p(b^m - a^m) - 2qa^m, & p(a^m - c^m), & p(c^m - b^m) + 2qc^m \\ p(a^m - c^m) + 2qa^m, & p(c^m - b^m) - 2qb^m, & p(b^m - a^m) \end{vmatrix} = 0$$

sein, was sich nach Addition der Reihen sofort ergibt

Für die Coordinaten eines Schnittpunktes erhält man aus der Determinante den Ausdruck

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= (4q^2 b^m c^m - 2pq(c^m - b^m)^2 + p^2 K) \\ &: (4q^2 a^m c^m - 2pq(a^m - c^m)^2 + p^2 K) \\ &: (4q^2 a^m b^m - 2pq(a^m - b^m)^2 + p^2 K) \end{aligned}$$

wenn man zur Abkürzung den Ausdruck

$$a^m b^m + a^m c^m + b^m c^m - a^{2m} - b^{2m} - c^{2m} = K$$

setzt.

Um einige dieser Schnittpunkte kennen zu lernen, setzen wir zunächst $q = 0$, dann wird der Schnittpunkt

$$Y \equiv A + B + C \equiv G_0$$

Setzen wir ferner $p = 0$, so wird

$$Y \equiv b^m c^m A + a^m c^m B + a^m b^m C$$

oder

$$Y \equiv \frac{1}{a^m} A + \frac{1}{b^m} B + \frac{1}{c^m} C \equiv G_{-m}$$

Setzen wir weiter $p = -2q$, verlängern wir also die Strecken AA_m' , BB_m' , CC_m' um die eigene Grösse derselben über A_m' , B_m' , C_m' hinaus, und verbinden die so erhaltenen Teilpunkte mit A_m , B_m , C_m , so wird

$$Y \equiv a^m \delta_a A + b^m \delta_b B + c^m \delta_c C$$

dies ist aber der Punkt M_{m1} . Da aber die Geraden $A_m M_{m1}'$, $B_m M_{m1}$, $C_m M_{m1}$ auch durch die Punkte A' , B' , C' gehen, so sieht man, dass auf jeder dieser drei Geraden vier sich entsprechende Punkte liegen.

Setzen wir $p = q$, verbinden wir also die Mitten der Strecken AA_m' etc. mit A_m etc., so wird

$$\begin{aligned} Y \equiv (4b^m c^m - 2(c^m - b^m)^2 + K) A &+ (4a^m c^m - 2(a^m - c^m)^2 + K) B \\ &+ (4a^m b^m - 2(a^m - b^m)^2 + K) C \end{aligned}$$

Dieser Punkt soll mit E_{m1} bezeichnet werden.

Um aber zu beweisen, dass die in der oben angegebenen Weise erhaltenen Schnittpunkte auf einer Hyperbel liegen, welche dem Dreieck $A_m B_m C_m$ umschrieben ist, transformiren wir die Coordinaten in Bezug auf dieses Dreieck. Wie früher müssen wir dann setzen

$$A \equiv \alpha_m A + \beta_m B + \gamma_m C$$

$$B \equiv \beta_m A + \gamma_m B + \alpha_m C$$

$$C \equiv \gamma_m A + \alpha_m B + \beta_m C$$

wenn $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$ die früher gebrauchten Abkürzungen bezeichnen.

Statt aber den Ausdruck für Y zu transformiren, ist es bequemer, denselben direct abzuleiten. Nun wird der Ausdruck für T_a , wenn man A in der angegebenen Weise ersetzt und zur Abkürzung schreibt

$$S = \alpha_m + \beta_m + \gamma_m$$

$$T_a \equiv 2q\alpha_m A_m + (2q\beta_m + pS) B_m + (2q\gamma_m + pS) C_m$$

Ebenso erhält man

$$T_b \equiv (2q\beta_m + pS) A_m + 2q\gamma_m B_m + (2q\alpha_m + pS) C_m$$

$$T_c \equiv (2q\gamma_m + pS) A_m + (2q\alpha_m + pS) B_m + (2q\beta_m + pS) C_m$$

Man erhält daraus für den Schnittpunkt der Geraden $T_a A_m, T_b B_m$ und $T_c C_m$

$$Y \equiv (2q\beta_m + pS)(2q\gamma_m + pS) A_m + (2q\beta_m + pS)(2q\alpha_m + pS) B_m \\ + (2q\alpha_m + pS)(2q\gamma_m + pS) C_m$$

Aus diesem Ausdrucke erhält man die Coordinaten der oben kennen gelernten Punkte im neuen Coordinatensystem

$$G_{-m} \equiv \beta_m \gamma_m A_m + \alpha_m \beta_m B_m + \alpha_m \gamma_m C_m$$

$$M_{m1} \equiv (\alpha_m + \gamma_m)(\alpha_m + \beta_m) A_m + (\alpha_m + \gamma_m)(\beta_m + \gamma_m) B_m \\ + (\beta_m + \gamma_m)(\alpha_m + \beta_m) C_m$$

$$E_{m1} \equiv \frac{A_m}{3\alpha_m + \beta_m + \gamma_m} + \frac{B_m}{3\gamma_m + \alpha_m + \beta_m} + \frac{C_m}{3\beta_m + \alpha_m + \gamma_m}$$

$$K_{m1} \equiv \frac{1}{d_\alpha} A_m + \frac{1}{d_\beta} B_m + \frac{1}{d_\gamma} C_m$$

Zur Auffindung der Constanten eines Kegelschnittes, der durch die Punkte G_0 und G_{-m} geht, und dem Dreieck $A_m B_m C_m$ umschrieben ist, hat man nun die beiden Gleichungen

$$f + g + h = 0$$

$$f\alpha_m + g\gamma_m + h\beta_m = 0$$

Daraus wird

$$f : g : h = (\beta_m - \gamma_m) : (\alpha_m - \beta_m) : (\gamma_m - \alpha_m)$$

oder unter Weglassung des überflüssigen Factors

$$f : g : h = (b^m - c^m) : (c^m - a^m) : (a^m - b^m)$$

Sollen nun die Punkte Y auf dem durch diese Constanten bestimmten Kegelschnitte liegen, so muss man haben:

$$(b^m - c^m)(2q\alpha_m + pS) + (c^m - a^m)(2q\gamma_m + pS) + (a^m - b^m)(2q\beta_m + pS) = 0$$

Dies ist aber der Fall, denn das Product mit dem Factor p ist ersichtlich null, das Product mit dem Factor q aber verschwindet auf Grund der beiden aus

$$A_m = a^m \alpha_m + c^m \beta_m + a^m \gamma_m$$

sich ergebenden Gleichungen

$$c^m \alpha_m + b^m \beta_m + a^m \gamma_m = 0$$

$$b^m \alpha_m + a^m \beta_m + c^m \gamma_m = 0$$

Der Mittelpunkt Φ_{m1} dieses Kegelschnittes, der, weil der Punkt G_0 innerhalb des Dreiecks $A_m B_m C_m$ liegt, immer eine Hyperbel ist, ergibt sich in Bezug auf dieses Dreieck auf bekannte Weise

$$\Phi_{m1} \equiv (b^m - c^m)^2 A_m + (c^m - a^m)^2 B_m + (a^m - b^m)^2 C_m$$

Die Hyperbel, welche wir soeben in Betracht gezogen, kann nun noch auf andere Weise entstanden gedacht werden. Teilt man nämlich die Geraden $A'A'_m$, $B'B'_m$, $C'C'_m$ in demselben Verhältniss und verbindet die Teilpunkte bezüglich mit A_m , B_m , C_m , so schneiden sich je drei dieser Geraden gleichfalls in einem Punkte, und der Ort dieser Schnittpunkte ist wieder die eben besprochene Hyperbel.

Wir führen den Beweis für diese Behauptung am bequemsten, indem wir sofort die auf das Dreieck $A_m B_m C_m$ transformirten Coordinaten zur Verwendung bringen. Nun ist, wenn man $A'A'_m$ im Verhältniss $p : q$ teilt, der Teilpunkt

$$T_a \equiv \frac{1}{p+q} \left(q \frac{B+C}{2} + p \frac{B_m+C_m}{2} \right)$$

also in transformirten Coordinaten

$$T_a \equiv q(\beta_m + \gamma_m) A_m + (q(\alpha_m + \gamma_m) + pS) B_m + (q(\alpha_m + \beta_m) + pS) C_m$$

$$T_b \equiv (q(\alpha_m + \gamma_m) + pS)(A_m + q(\alpha_m + \beta_m) B_m + (q(\beta_m + \gamma_m) + pS) C_m$$

$$T_c \equiv (q(\alpha_m + \beta_m) + pS) A_m + (q(\beta_m + \gamma_m) + pS) B_m + q(\alpha_m + \gamma_m) C_m$$

Zieht man nun $T_a A_m$, $T_b B_m$, $T_c C_m$, so schneiden sich diese drei Geraden in demselben Punkte, denn es ist

$$\begin{vmatrix} 0, & -(q(\alpha_m + \beta_m) + pS), & q(\alpha_m + \gamma_m) + pS \\ q(\beta_m + \gamma_m) + pS, & 0, & -q(\alpha_m + \gamma_m) + pS \\ -(q(\beta_m + \gamma_m) + pS), & q(\alpha_m + \beta_m) + pS, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

wie sich aus der Addition der Reihen ergibt.

Für die Coordinaten des Schnittpunktes ergibt sich aus der Determinante

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= (q(\alpha_m + \gamma_m) + pS)(q(\alpha_m + \beta_m) + pS) \\ &: (q(\alpha_m + \gamma_m) + pS)(q(\beta_m + \gamma_m) + pS) \\ &: (q(\beta_m + \gamma_m) + pS)(q(\alpha_m + \beta_m) + pS) \end{aligned}$$

Man erkennt aus diesem Ausdrucke sofort, dass zu der Schar dieser Schnittpunkte auch die Punkte G_0 und G_{-m} für $q = 0$ und für $q = -p$ gehören. Aus letzterem Umstande geht hervor, was übrigens schon aus früher Gesagtem erschlossen werden konnte, dass $A'A_m' \parallel A_m G_{-m}$ etc. ist. Aus der Tatsache aber, dass die beiden Punkte G_0 und G_{-m} auch hier wieder zu den Schnittpunkten gehören, ersieht man, dass der Kegelschnitt, welchem, wie sofort erwiesen wird, alle Schnittpunkte für dasselbe m angehören, nur wieder dieselbe Hyperbel sein kann, welche oben behandelt wurde, da ja die Constanten dieselben sein müssen, wie oben. Dass aber alle Schnittpunkte auf jener Hyperbel liegen, ergibt sich aus der Gleichung:

$$\begin{aligned} (b^m - c^m)(q(\beta_m + \gamma_m) + pS) + (c^m - a^m)(q(\alpha_m + \beta_m) + pS) \\ + (a^m - b^m)(q(\alpha_m + \gamma_m) + pS) = 0 \end{aligned}$$

welche man mit Hülfe der beiden oben hingeschriebenen aus Δ_m sich ergebenden Gleichungen leicht als richtig erkennt.

Aus dieser Tatsache nun, dass die Hyperbel Φ_{m1} auf doppelte Art entstanden gedacht werden kann, ergibt sich derselbe Schluss, welcher oben in ähnlichem Falle gezogen wurde. Es liegen nämlich auf den von A_m , B_m , C_m bzw. ausgehenden Strahlen je vier sich entsprechende Punkte, nämlich ausser dem Ausgangspunkte und dem Punkte der Hyperbel noch zwei Teilpunkte, von denen die auf AA_m' etc. liegenden den Index 1, die auf $A'A_m'$ den Index 2 erhalten mögen, und für welche man hat

$$AT_{a1} : T_{a1}A_m' = BT_{b1} : T_{b1}B_m' = CT_{c1} : T_{c1}C_m'$$

und

$$A'T_{a2} : T_{a2}A_m' = BT_{b2} : T_{b2}B_m' = C'T_{c2} : T_{c2}C_m'$$

Von den Geraden $A_m M_{m1}$, $B_m M_{m1}$, $C_m M_{m1}$ ist dies bereits oben hervorgehoben und für die Geraden $A_m G_{-m}$ etc. ebenfalls ersichtlich. Der Endpunkt T_{a1} der um die eigene Grösse über A_m' hinaus verlängerten Strecke AA_m' fällt auf $A_m M_{m1}$ und bildet also die vierte Ecke des durch $B_m A C_m$ bestimmten Parallelogrammes. Ebenso fällt die Ecke T_{b1} des Parallelogramms $C_m B A_m T_{b1}$ auf $B_m M_{m1}$ und die Ecke T_{c1} des Parallelogramms $B_m C A_m T_{c1}$ auf $C_m M_{m1}$. Die Coordinaten des Punktes K_{m1} ergaben sich oben für $q = -p$, er ist also der Schnittpunkt der durch A_m etc. zu AA_m' etc. gezogenen Parallelen. Dieselben Coordinaten erhält man, wenn man im zweiten Falle $q = -2p$ setzt, d. i. die Strecke $A'A_m'$ etc. über A' etc. hinaus um die eigene Grösse verlängert und die Endpunkte mit A_m etc. verbindet, so dass man also mit Einschluss der unendlich fernen Punkte auch hier wieder je vier entsprechende Punkte auf den drei Geraden hat. Es ergibt sich wieder, dass $A'A_m' = \frac{1}{2}AA_m$, und dass der Teilpunkt T_{a2} auf $A_m K_{m1}$ den Parallelogrammen $A_m AA_m' T_{a2}$ und $BA_m' C T_{a2}$ als Eckpunkt zugehört. Der Punkt E_{m1} wurde oben erhalten für $p = q$, d. i. durch Halbierung der Strecken AA_m' etc. Man erhält den nämlichen Punkt, wenn man im zweiten Falle in dem Ausdruck für die Coordinaten des Schnittpunktes

$$p : q = 3 : -2$$

setzt, also die Geraden $A'A_m'$ etc. um das Doppelte der eigenen Länge über A_m' hinaus verlängert und mit A_m etc. verbindet. Halbt man endlich die Strecken $A'A_m'$ etc. und verbindet die Teilpunkte mit A_m etc., so wird

$$Y \equiv \frac{1}{\alpha_m + 2\beta_m + 2\gamma_m} A_m + \frac{1}{2\alpha_m + 2\beta_m + \gamma_m} B_m + \frac{1}{2\alpha_m + \beta_m + 2\gamma_m} C_m$$

Man erhält denselben Punkt, welcher mit J_{m1} bezeichnet sein möge, wenn man im ersten Falle

$$p : q = 4 : -1$$

setzt, wenn man also die Strecken AA_m' etc. über A_m' etc. hinaus um das Drittel der eigenen Grösse verlängert.

Vergleicht man zum Schlusse die Constanten der Hyperbel mit dem Mittelpunkte Φ_{m1} mit denen der Hyperbel $H_{\gamma 1}$, so ersieht man, dass dieselben in beiden Fällen übereinstimmen. Die beiden Hyperbeln werden also für den Fall der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke ABC und $A_m B_m C_m$, denen dieselben umschrieben sind, und welche bekanntermassen für $m = 2$ statt hat, in gewissen Beziehungen zu einander stehen. Dies ergibt sich auch noch durch eine andere Erwägung. Construiren wir nämlich die Punkte A_μ , B_μ , C_μ so, dass

dieselben zu dem Dreieck $A_m B_m C_m$ in derselben Beziehung stehen, wie die Punkte A_m, B_m, C_m zum Dreieck ABC , so sind für $m = \mu = 2$ die Dreiecke ABC und $A_m B_m C_m$, wie schon bemerkt, einander ähnlich, mithin das Verhältniss der Seiten für die beiden Dreiecke dasselbe. Bilden wir nun die Hyperbel Φ_{m1} , so ist diese dem Dreieck $A_2 B_2 C_2$ für $m = 2$ umschrieben, und ihre Constanten sind gegeben durch

$$f : g : h = (b^2 - c^2) : (c^2 - a^2) : (a^2 - b^2)$$

Bilden wir aber in Bezug auf das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ und mit Rücksicht auf $A_\mu B_\mu C_\mu$ die Hyperbel Γ , so sind, die Seiten des Dreiecks $A_2 B_2 C_2$ mit a', b', c' bezeichnet, die Constanten derselben gegeben durch

$$f : g : h = (b'^2 - c'^2) : (c'^2 - a'^2) : (a'^2 - b'^2)$$

oder nach der obigen Bemerkung

$$f : g : h = (b^2 - c^2) : (c^2 - a^2) : (a^2 - b^2)$$

und da diese Hyperbel ebenfalls dem Dreieck $A_2 B_2 C_2$ umschrieben ist, so müssen die letztgenannten Hyperbeln identisch sein. Man kann sich also die Hyperbel Γ in Bezug auf das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ auf vierfache Weise entstanden denken und es liegen auf den von A_2, B_2, C_2 ausgehenden Strahlen noch je zwei weitere sich entsprechende Punkte. Wegen der Identität der beiden Hyperbeln Φ_{21} in Bezug auf das Dreieck ABC und Γ in Bezug auf $A_2 B_2 C_2$ und wegen der Aehnlichkeit der beiden genannten Dreiecke muss auch die Hyperbel Γ , welche dem Dreieck ABC umschrieben ist, ähnlich sein mit der Hyperbel Φ_{21} , welche dem Dreieck $A_2 B_2 C_2$ umschrieben ist.

V.

1. Teilt man die Strecken AA_m, BB_m, CC_m in demselben Verhältniss und verbindet die Teilpunkte bzhw.

α) mit A', B', C'

β) mit A_m', B_m', C_m'

so schneiden sich diese Verbindungsgeraden in demselben Punkte, und der Ort dieser Schnittpunkte ist eine Hyperbel, welche

α) dem Dreieck $A'B'C'$

β) dem Dreieck $A_m' B_m' C_m'$

umschrieben ist.

2. Teilt man die Strecken AC_m , BA_m , CB_m in demselben Verhältniss und verbindet die Teilpunkte

$\alpha)$ mit A' , B' , C'

$\beta)$ mit C_m' , A_m' , B_m'

so schneiden sich die Verbindungsgeraden in demselben Punkte und der Ort dieser Schnittpunkte ist eine Hyperbel, welche

$\alpha)$ dem Dreieck $A'B'C'$

$\beta)$ dem Dreieck $A_m'B_m'C_m'$

umschrieben ist.

3. Teilt man die Strecken AB_m , BC_m , CA_m in demselben Verhältniss und verbindet die Teilpunkte

$\alpha)$ mit A' , B' , C'

$\beta)$ mit B_m' , C_m' , A_m'

so schneiden sich die Verbindungsgeraden in demselben Punkte und alle diese Schnittpunkte liegen auf einer Hyperbel, welche

$\alpha)$ dem Dreieck $A'B'C'$

$\beta)$ dem Dreieck $A_m'B_m'C_m'$

umschrieben ist.

Es wird auch hier wieder genügen, den Beweis auf den ersten Fall zu beschränken, da der Gang für die beiden andern der nämliche ist.

$\alpha)$ Teilt man die Strecke AA_m im Verhältniss von $q:p$, so erhält man für den Teilpunkt T_a den Ausdruck

$$T_a = \frac{pA + qA_m}{p + q}$$

oder

$$T_a \equiv (p\Sigma + qa^m)A + qc^m B + qb^m C$$

Ebenso erhält man

$$T_b \equiv qc^m A + (p\Sigma + qb^m)B + qa^m C$$

$$T_c \equiv qb^m A + qa^m B + (p\Sigma + qc^m)C$$

Verbindet man nun den ersten Teilpunkt mit A' , den zweiten mit B' , den dritten mit C' , so wird die Determinante

$$\begin{vmatrix} q(b^m - c^m), & p\Sigma + qa^m, & -(p\Sigma + qa^m) \\ -(p\Sigma + qb^m), & q(c^m - a^m), & p\Sigma + qb^m \\ p\Sigma + qc^m, & -(p\Sigma + qc^m), & q(a^m - b^m) \end{vmatrix} = 0$$

wie man nach Addition der Reihen sofort ersieht. Man erkennt daraus, dass die Verbindungsgeraden in der Tat durch denselben Punkt gehen. Für die Coordinaten des Schnittpunktes erhält man aus der Determinante

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= [q^2(a^m - b^m)(c^m - a^m) + (p\Sigma + qb^m)(p\Sigma + qc^m)] \\ &: [(p\Sigma + qc^m)(p\Sigma + qc^m) + (p\Sigma + qb^m)(qa^m - b^m)] \\ &: (p\Sigma + qc^m)[p\Sigma + q(a^m + b^m - c^m)] \\ &= (p\Sigma + qa^m)(p\Sigma + q\delta_a) : (p\Sigma + qb^m)(p\Sigma + q\delta_b) : (p\Sigma + qc^m)(p\Sigma + q\delta_c) \end{aligned}$$

wenn man wie früher zur Abkürzung setzt

$$b^m + c^m - a^m = \delta_a; \quad a^m + c^m - b^m = \delta_b; \quad a^m + b^m - c^m = \delta_c$$

Setzt man in diesem Ausdrucke, um einige Punkte näher kennen zu lernen, $p = 0$, so wird

$$Y_1 = a^m \delta_a A + b^m \delta_b B + c^m \delta_c C$$

dies ist aber der Punkt M_{m1} .

Setzt man $q = 0$, so wird

$$Y_1 \equiv A + B + C$$

dies ist der Punkt G_0 .

Setzt man $p = -q$, so wird

$$Y_1 \equiv a^m(b^m + c^m)A + b^m(c^m + a^m)B + c^m(a^m + b^m)C$$

oder

$$Y_1 \equiv \left(\frac{1}{b^m} + \frac{1}{c^m}\right)A + \left(\frac{1}{c^m} + \frac{1}{a^m}\right)B + \left(\frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m}\right)C$$

dies ist mithin der Punkt S_{m1} .

Für $p = q$ endlich wird

$$\begin{aligned} Y_1 \equiv (2a^m + b^m + c^m)(b^m + c^m)A &+ (a^m + 2b^m + c^m)(a^m + c^m)B \\ &+ (a^m + b^m + 2c^m)(a^m + b^m)C \end{aligned}$$

Die Lage dieses Punktes wird aus dem Folgenden erhellen.

Um nun zu zeigen, dass alle Schnittpunkte einer Hyperbel angehören, welche dem Dreieck $A'B'C'$ umschrieben ist, transformiren wir die Coordinaten auf eben dieses Dreieck. Wir haben dann zu setzen

$$A \equiv B' + C' - A'$$

$$B \equiv A' + C' - B'$$

$$C \equiv A' + B' - C'$$

Der Einfachheit halber machen wir diese Substitutionen in den Ausdrücken für T_a etc. Dann wird

$$\begin{aligned} T_a &\equiv (p\Sigma + qa^m)(B' + C' - A') + qc^m(A' + C' - B') + qb^m(A' + B' - C') \\ &\equiv (q\delta_a - p\Sigma)A' + (q\delta_c + p\Sigma)B' + (q\delta_b + p\Sigma)C' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_b &\equiv qc^m(B' + C' - A') + (p\Sigma + qb^m)(A' - B' + C') + qa^m(A' + B' - C') \\ &\equiv (q\delta_c + p\Sigma)A' + (q\delta_b - p\Sigma)B' + (q\delta_a + p\Sigma)C' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_c &\equiv qb^m(B' + C' - A') + qa^m(A' + C' - B') + (p\Sigma + qc^m)(A' + B' - C') \\ &\equiv (q\delta_b + p\Sigma)A' + (q\delta_a + p\Sigma)B' + (q\delta_c - p\Sigma)C' \end{aligned}$$

Da nun der erste Teilpunkt mit $A'(1, 0, 0)$, der zweite mit $B'(0, 1, 0)$, der dritte mit $C'(0, 0, 1)$ verbunden wird, so erhält man für den Schnittpunkt dieser drei Geraden

$$\begin{aligned} Y_1 &\equiv (q\delta_b + p\Sigma)(q\delta_c + p\Sigma)A' + (q\delta_a + p\Sigma)(q\delta_c + p\Sigma)B' \\ &\quad + (q\delta_a + p\Sigma)(q\delta_b + p\Sigma)C' \end{aligned}$$

oder

$$Y_1 \equiv \frac{1}{q\delta_a + p\Sigma} A' + \frac{1}{q\delta_b + p\Sigma} B' + \frac{1}{q\delta_c + p\Sigma} C'$$

Setzt man nun in diesem Ausdrücke $p = 0$, so wird

$$Y_1 \equiv \frac{1}{\delta_a} A' + \frac{1}{\delta_b} B' + \frac{1}{\delta_c} C'$$

Wie man sieht, stellt dieser Punkt, da das Verhältniss der Seiten in beiden Dreiecken das nämliche ist, im Dreiecke $A'B'C'$ den Punkt M_m' dar; in Bezug auf das Dreieck ABC aber ist dieses der Punkt M_m , was für $m = 2$ bekannt ist, da ja der Mittelpunkt des einem Dreieck umschriebenen Kreises zusammenfällt mit dem Schnittpunkt der Höhentransversalen des Dreieckes, dessen Ecken die Seitenmitten des ersten Dreiecks sind.

Für $q = 0$ wird

$$Y_1 \equiv A' + B' + C' \equiv A + B + C \equiv G_0$$

Für $p + q = 0$ wird

$$Y_1 \equiv \frac{1}{a^m} A' + \frac{1}{b^m} B' + \frac{1}{c^m} C'$$

Dies ist aber für das Dreieck $A'B'C'$ der Punkt G_{-m} . Für ABC

stellt, wie wir gesehen, derselbe Punkt den mit S_{m1} bezeichneten dar. Diesen Umstand kann man benutzen, um für das Dreieck $A'B'C'$ die Punkte $A_{-m} B_{-m} C_{-m}$ zu construiren, indem man durch S_{m1} die Parallelen zu den Seiten des Dreiecks zieht und auf diesen die Entfernung des Punktes S_{m1} von dem einen Endpunkte, vom anderen Endpunkte aus anträgt. Umgekehrt ergibt sich, dass die durch die Punkte $A_m B_m C_m$ des Dreiecks $A'B'C'$ zu den Dreiecksseiten gezogenen Parallelen sich im Punkte S_{m1} des Dreiecks ABC schneiden.

Für $p = q$ wird

$$Y \equiv \frac{1}{b^m + c^m} A' + \frac{1}{a^m + c^m} B' + \frac{1}{a^m + b^m} C$$

Dies ist mithin für das Dreieck $A'B'C'$ der Punkt S_{m1}' . Construirt man also für das Dreieck ABC das Dreieck, welches in der Elementargeometrie zum Nachweis des Satzes dient, dass die Höhentransversalen des Dreiecks durch denselben Punkt gehen, und welches mit $A''B''C''$ bezeichnet werden möge, sucht für dieses Hilfsdreieck die Punkte $A_m B_m C_m$ und halbirt die Verbindungslinien dieser Punkte mit den Eckpunkten des Hilfsdreiecks und verbindet diese Halbirungspunkte mit den Eckpunkten des Dreiecks ABC , so gehen auch diese Geraden durch den Punkt S_{m1} des Dreiecks ABC .

Um nunmehr nachzuweisen, dass alle durch den Ausdruck Y bestimmten Punkte auf einem Kegelschnitte liegen, welcher dem Dreieck $A'B'C'$ nmschrieben ist, bestimmen wir das Verhältniss der Constanten f, g, h des durch $A'B'C'$, $G_0 M_{m1}$ (M_{m1}' in Bezug auf $A'B'C'$) gehenden Kegelschnittes. Wir haben zu diesem Behufe die beiden Gleichungen

$$f + g + h = 0$$

und

$$a^m f + b^m g + c^m h = 0$$

Daraus wird

$$f : g : h = (c^m - b^m) : (a^m - c^m) : (b^m - a^m)$$

Da nun aber, wovon man sich leicht überzeugt, auch die Gleichung zu Recht besteht

$$(c^m - b^m)(q\delta^a + p\Sigma) + (a^m - c^m)(q\delta^b + p\Sigma) + (b^m - a^m)(q\delta^c + p\Sigma) = 0$$

so liegen alle oben bestimmten Punkte Y auf dem durch die Punkte $A'B'C'$ $G_0 M_m$ bestimmten Kegelschnitte.

Für den Mittelpunkt dieser Curve, welche eine Hyperbel sein muss, da G_0 innerhalb des Dreiecks $A'B'C'$ liegt, ergibt sich

$$x_1 : x_2 : x_3 = (b^m - c^m)^2 : (c^m - a^m)^2 : (a^m - b^m)^2$$

Dies ist aber derselbe Punkt, der oben in Bezug auf das Dreieck ABC mit W_{m1} bezeichnet wurde. Gehen wir, um die Lage des Punktes in Bezug auf das Dreieck ABC zu bestimmen, auf das ursprüngliche Coordinatensystem zurück, so wird dieser Punkt, den wir vorübergehend mit w bezeichnen wollen, den Ausdruck erhalten

$$\begin{aligned} w &\equiv (b^m - c^m)^2 (B + C) + (c^m - a^m)^2 (A + C) + (a^m - b^m)^2 (A + B) \\ &\equiv ((a^m - b^m)^2 + (c^m - a^m)^2) A + ((b^m - c^m)^2 + (a^m - b^m)^2) B \\ &\quad + ((c^m - a^m)^2 + (b^m - c^m)^2) C \\ &\equiv W_{m3} + W_{m2} \end{aligned}$$

Es halbirt also der Mittelpunkt der fraglichen Hyperbel die Verbindungslinie der beiden Punkte W_{m2} und W_{m3} .

Schon die Constanten, welche sich für die eben untersuchte Hyperbel ergaben, sowie der Umstand, dass auf derselben die in Bezug auf $A'B'C'$ mit G_{-m} , S_{m1}' , M_{m1}' und G_0 zu bezeichnenden Punkte liegen, lässt erkennen, dass diese Hyperbel für das Dreieck $A'B'C'$ ganz dieselbe Bedeutung hat, wie die Hyperbel $H_{\gamma 1}$ für ABC . Da aber die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ immer ähnlich sind, so müssen auch die beiden Hyperbeln W_{m1} und w dieselbe Excentricität haben.

Noch eine andere Erwägung legt die eben besprochene Tatsache nahe. Wenn man nämlich wieder das oben schon erwähnte Dreieck $A''B''C''$ mit in Betracht zieht, so steht ja zu diesem das Dreieck ABC in demselben Verhältniss wie zu ABC das Dreieck $A'B'C'$. Dann ist die eben besprochene Hyperbel identisch mit der Hyperbel $H_{\gamma 1}$. Man kann also diese oben schon auf mehrfach verschiedene Weise in Bezug auf das Dreieck ABC construirte Hyperbel in Bezug auf eben dieses Dreieck auch dadurch erhalten, dass man zu dem Dreieck $A''B''C''$ die Punkte $A_m B_m C_m$ sucht, die Verbindungslinien dieser Punkte mit $A''B''C''$ in demselben Verhältniss teilt und die Teilpunkte mit ABC verbindet. Die Schnittpunkte dieser Verbindungslinien bilden dann die Hyperbel $H_{\gamma 1}$ in Bezug auf ABC . Da nun auch hier, wie in den früheren Fällen, wo es sich um die Entstehung dieser Hyperbel handelte, die Strahlen von den Punkten A , B , C ausgehen und sich zu je dreien in je einem Punkte der Hyperbel schneiden, und da jeder dieser Strahlen auch durch einen Punkt T_a bzw. T_b oder T_c geht, so sind auf den drei zusammengehörigen Strahlen drei weitere sich entsprechende Punkte zu verzeichnen.

β) Um nun zu dem Beweise der zweiten oben aufgestellten Behauptung überzugehen, ist es, da der Kegelschnitt dem Dreieck $A_m' B_m' C_m'$ umschrieben ist, notwendig, die Coordinaten auf dieses Dreieck zu transformiren. Denken wir uns nun die Transformation zunächst in Bezug auf $A_m B_m C_m$ gemacht, und gehen wir sodann auf $A_m' B_m' C_m'$ über, so hätten wir zunächst für A, B, C die schon mehrfach erwähnten Ausdrücke zu setzen, für A_m, B_m, C_m aber sodann, analog den früheren Fällen

$$\begin{aligned} A_m &\equiv B_m' + C_m' - A_m' \\ B_m &\equiv A_m' + C_m' - B_m' \\ C_m &\equiv A_m' + B_m' - C_m' \end{aligned}$$

so dass man also hat

$$\begin{aligned} A_m &\equiv \alpha_m (B_m' + C_m' - A_m') + \beta_m (A_m' + C_m' - B_m') \\ &\quad + \gamma_m (A_m' + B_m' - C_m') \end{aligned}$$

oder

$$A \equiv d_\alpha A_m' + d_\beta B_m' + d_\gamma C_m'$$

falls man wie früher zur Abkürzung setzt

$$\begin{aligned} \beta + \gamma - \alpha &= d_\alpha \\ \alpha + \gamma - \beta &= d_\beta \\ \alpha + \beta - \gamma &= d_\gamma \end{aligned}$$

Ebenso erhält man

$$\begin{aligned} B &\equiv d_\beta A_m' + d_\gamma B_m' + d_\alpha C_m' \\ C &\equiv d_\gamma A_m' + d_\alpha B_m' + d_\beta C_m' \end{aligned}$$

Nun haben wir unter α) für T_α den Ausdruck abgeleitet

$$T_\alpha \equiv (p \Sigma + q a^m) A + q c^m B + q b^m C$$

In transformirten Coordinaten wird also

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv (p \Sigma + q a^m) (d_\alpha A_m' + d_\beta B_m' + d_\gamma C_m') \\ &\quad + q c^m (d_\beta A_m' + d_\gamma B_m' + d_\alpha C_m') + q b^m (d_\gamma A_m' + d_\alpha B_m' + d_\beta C_m') \\ &\equiv (p \Sigma d_\alpha + q (a^m d_\alpha + c^m d_\beta + b^m d_\gamma)) A_m' + (p \Sigma d_\beta \\ &\quad + (a^m d_\beta + b^m d_\alpha + c^m d_\gamma)) B_m' + p \Sigma d_\gamma + q (a^m d_\gamma + b^m d_\beta \\ &\quad + c^m d_\alpha) C_m' \end{aligned}$$

Auf Grund der aus der Determinante Δ_m sich ergebenden Gleichungen

$$c^m \alpha_m + b^m \beta_m + a^m \gamma_m = 0$$

und

$$b^m \alpha^m + a^m \beta_m + c^m \gamma_m = 0$$

erhält man nach einigen Reductionen

$$T_a \equiv (p \Sigma d_\alpha - q \Delta_m) A_m' + (p \Sigma d_\beta + q \Delta_m) B_m' + (p \Sigma d_\gamma + q \Delta_m) C_m'$$

Ebenso erhält man für T_b und T_c nach vorgenommener Reduction die Ausdrücke

$$T_b \equiv (p \Sigma d_\beta + q \Delta_m) A_m' + (p \Sigma d_\gamma - q \Delta_m) B_m' + (p \Sigma d_\alpha + q \Delta_m) C_m'$$

$$T_c \equiv (p \Sigma d_\gamma + q \Delta_m) A_m' + (p \Sigma d_\alpha + q \Delta_m) B_m' + (p \Sigma d_\beta - q \Delta_m) C_m'$$

Da nun T_a mit $A_m'(1, 0, 0)$, T_b mit $B_m'(0, 1, 0)$, T_c mit $C_m'(0, 0, 1)$ verbunden wird, so erkennt man, dass diese drei Verbindungsgeraden durch denselben Punkt gehen, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0, & -(p \Sigma d_\gamma + q \Delta_m), & p \Sigma d_\beta + q \Delta_m \\ p \Sigma d_\alpha + q \Delta_m, & 0, & -(p \Sigma d_\beta + q \Delta_m) \\ -(p \Sigma d_\alpha + q \Delta_m), & p \Sigma d_\gamma + q \Delta_m, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ist. Dies ist aber in der Tat der Fall, wie man nach Addition der Reihen sofort erkennt.

Für die Coordinaten x_1, x_2, x_3 des Schnittpunktes erhält man aus dieser Determinante

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= (p \Sigma d_\beta + q \Delta_m) (p \Sigma d_\gamma + q \Delta_m) \\ &: (p \Sigma d_\beta + q \Delta_m) (p \Sigma d_\alpha + q \Delta_m) : (p \Sigma d_\alpha + q \Delta_m) (p \Sigma d_\gamma + q \Delta_m) \end{aligned}$$

Um wieder einige Punkte näher kennen zu lernen, setzen wir $p = 0$, dann erhalten wir für den Schnittpunkt

$$Y \equiv A_m' + B_m' + C_m' \equiv G_0$$

Für $q = 0$ wird

$$Y_1 \equiv \frac{1}{d_\alpha} A_m' + \frac{1}{d_\gamma} B_m' + \frac{1}{d_\beta} C_m'$$

Für $p = q$ wird

$$Y_1 \equiv \frac{1}{\Sigma d_\alpha + \Delta_m} A_m' + \frac{1}{\Sigma d_\gamma + \Delta_m} B_m' + \frac{1}{\Sigma d_\beta + \Delta_m} C_m'$$

Für $p + q = 0$ wird

$$Y_1 \equiv \frac{1}{\Sigma d_\alpha - q \Delta_m} A_m' + \frac{1}{\Sigma d_\gamma - q \Delta_m} B_m' + \frac{1}{\Sigma d_\beta - q \Delta_m} C_m'$$

Für diesen Ausdruck erhält man auf Grund der aus der Determinante Δ_ω sich ergebenden Gleichungen:

$$Y_1 \equiv \frac{1}{\alpha_m} A_m' + \frac{1}{\gamma_m} B_m' + \frac{1}{\beta_m} C_m'$$

Denkt man sich nun durch den letzten Punkt und G_0 einen Kegelschnitt gelegt, welcher dem Dreieck $A_m' B_m' C_m'$ umschrieben ist, so erhält man zur Berechnung der Constanten f, g, h des Kegelschnittes die Gleichungen:

$$\begin{aligned} f + g + h &= 0 \\ f\alpha_m + g\gamma_m + h\beta_m &= 0 \end{aligned}$$

Daraus wird

$$f : g : h = (\beta_m - \gamma_m) : (\alpha_m - \beta_m) : (\gamma_m - \alpha_m)$$

oder

$$f : g : h = (b^m - c^m) : (c^m - a^m) : (a^m - b^m)$$

Sollen nun die Schnittpunkte, deren allgemeiner Ausdruck oben abgeleitet wurde, auf dem Kegelschnitte liegen, so muss die Gleichung erfüllt sein:

$$\begin{aligned} (b^m - c^m)(p \Sigma d_\beta + q \Delta_m) + (c^m - a^m)(p \Sigma d_\gamma + q \Delta_m) \\ + (a^m - b^m)(p \Sigma d_\beta + q \Delta_m) = 0 \end{aligned}$$

Nun ist sofort ersichtlich, dass die Glieder, welche den Coefficienten q gemeinsam haben, sich gegenseitig aufheben. Es muss also noch gezeigt werden, dass

$$(b^m - c^m) \Sigma d_\alpha + (c^m - a^m) \Sigma d_\gamma + (a^m - b^m) \Sigma d_\beta = 0$$

Die linke Seite dieser Gleichung lässt sich nun so umgestalten

$$\begin{aligned} c^{2m}(d_\gamma - d_\alpha) + b^{2m}(d_\alpha - d_\beta) + a^{2m}(d_\beta - d_\gamma) + a^m b^m(d_\alpha - d_\gamma) \\ + a^m c^m(d_\beta - d_\alpha) + b^m c^m(d_\gamma - d_\beta) \\ = (c^{2m} - a^m b^m)(d_\gamma - d_\alpha) + (b^{2m} - a^m c^m)(d_\alpha - d_\beta) + (a^{2m} - b^m c^m)(d_\beta - d_\gamma) \\ = \beta_m(\alpha_m - \gamma_m) + \gamma_m(\beta_m - \alpha_m) + \alpha_m(\gamma_m - \beta_m) = 0 \end{aligned}$$

Die Schnittpunkte liegen also in der Tat auf dem Kegelschnitte, welcher wieder eine Hyperbel ist. Der Mittelpunkt dieser Hyperbel ist gegeben durch den Ausdruck

$$u \equiv (b^m - c^m)^2 A_m' + (c^m - a^m)^2 B_m' + (a^m - b^m)^2 C_m'$$

Man erkennt auch hier wieder, dass für den Fall der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und $A_m B_m C_m$ die soeben besprochene Hyperbel für das Dreieck $AB_m' m' C_m'$ diejenige ist, deren Mittelpunkt

für ABC mit W_{m1} bezeichnet wurde. Da nun jene Aehnlichkeit für $m = 2$ immer statt hat, so bietet auch das unter β angegebene Verfahren ein Mittel zur Construction der Hyperbel Γ .

VI.

Eine nähere Betrachtung der im Vorhergehenden aufgestellten Formeln lässt erkennen, dass dieselben ihre Geltung behalten, wenn statt der Grössen a^m, b^m, c^m , für welche m beliebig war, $a : b : c$ aber das Verhältniss der Seiten des Coordinatendreiecks darstellte, ganz beliebige Grössen, etwa r, s und t gewählt werden, denn von dem gegenseitigen Verhältniss der Grössen a, b, c war nur bei dem Kegelschnitte H_α die Natur desselben abhängig. Die aufgestellten Sätze müssen also, von dem eben erwähnten Punkte abgesehen, auch Geltung haben, wenn man drei Punkte in Betracht zieht, welche durch folgende Ausdrücke bestimmt sind

$$Y_1 \equiv rA + sB + tC$$

$$Y_2 \equiv sA + tB + rC$$

$$Y_3 \equiv tA + rB + sC$$

Auf Punkte dieser Art sind wir aber bei jeder der vorher in Betracht gezogenen Kegelschnittscharen gestossen. So haben z. B. die auf $H_{\alpha 1}$ gelegenen Punkte die Form Y_1 , die auf $H_{\alpha 2}$ jene von Y_2 und die auf $H_{\alpha 3}$ jene von Y_3 , und wir werden also für jedes m und p bzw. q drei zusammengehörige Punkte Y erhalten, falls wir setzen:

$$a^m(q^2 b^m + p^2 c^m - pq a^m) = r$$

$$b^m(q^2 c^m + p^2 a^m - pq b^m) = s$$

$$c^m(q^2 a^m + p^2 b^m - pq c^m) = t$$

Je dreien solcher Punkte kommen mithin dieselben Eigenschaften zu, wie den Punkten A_m, B_m, C_m ; mithin, um die Punkte, für welche sich die Ausdrücke am einfachsten gestalten, hervorzuheben, den Punkten G_{m1}, G_{m2}, G_{m3} , welche für $p + q = 0$ auf den Kegelschnitten H_α erhalten wurden, den Punkten G_{-m}, O_m und O_m' , für welche die anderweitig für dieselben gebrauchte Bezeichnungsweise auch in dieser Abhandlung beibehalten wurde, während sie eigentlich mit $G_{-m1}, G_{-m2}, G_{-m3}$ zu bezeichnen wären, und welche für $p = 0$ oder $q = 0$ auf den Kegelschnitten H_α erhalten werden, den Punkten M_m , welche für $p = q$ sich ergaben, den Punkten M_m', S_m, S_m' etc. Da nach dem Gesagten die Sätze, welche von den Punkten Y_1, Y_2, Y_3 gelten müssen, leicht formulirt werden können, und da die Beweise für diese Sätze aus den oben geführten sich ergeben, wenn

man in den betr. Formeln statt der Grössen a^m, c^m, b^m bzw. r, s, t setzt, so ist es nicht nötig, hier weiter auf jene Sätze und Beweise einzugehen. Dagegen sollen die wichtigsten Punkte, auf welche man stösst, wenn man in den oben geführten Untersuchungen an Stelle der A_m, B_m, C_m die Punkte G_m, G_{-m}, S_m etc. treten lässt, noch vorgeführt werden, wenn auch dabei in einzelnen Fällen Wege, welche vorher in dem einen Sinne zurückgelegt wurden, nun im entgegengesetzten durchwandert werden.

Unter allen Umständen werden wir uns dadurch neuerdings von der Richtigkeit dessen überzeugen, was schon vorher über die gegenseitige Lage der betr. Punkte und Linien gesagt wurde.

Gehen wir von drei Punkten, deren Coordinaten bzw. $r, s, t; s, t, r; t, r, s$ sind, aus, so ist ein Punkt auf den Kegelschnitten H_a , welche sich an diese Punkte knüpfen, gegeben durch

$$\begin{aligned} Z_1 &\equiv r(p^2s + q^2t - pqr)A + t(p^2r + q^2s - pqt)B + s(p^2t + q^2r - pqs)C \\ Z_2 &\equiv t(p^2r + q^2s - pqt)A + s(p^2t + q^2r - pqs)B + r(p^2s + q^2t - pqr)C \\ Z_3 &\equiv s(p^2t + q^2r - pqs)A + r(p^2s + q^2t - pqr)B + t(p^2r + q^2s - pqt)C \end{aligned}$$

Für $p = 0$ wird daraus

$$Z_1 \equiv \frac{1}{s}A + \frac{1}{r}B + \frac{1}{t}C$$

$$Z_2 \equiv \frac{1}{r}A + \frac{1}{t}B + \frac{1}{s}C$$

$$Z_3 \equiv \frac{1}{t}A + \frac{1}{s}B + \frac{1}{r}C$$

Für $q = 0$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{t}A + \frac{1}{s}B + \frac{1}{r}C$$

$$Z_2 \equiv \frac{1}{s}A + \frac{1}{r}B + \frac{1}{t}C$$

$$Z_3 \equiv \frac{1}{r}A + \frac{1}{t}B + \frac{1}{s}C$$

Für $p + q = 0$ wird

$$Z_1 \equiv rA + tB + sC$$

$$Z_2 \equiv tA + sB + rC$$

$$Z_3 \equiv sA + rB + tC$$

Für $p = q$ wird

$$Z_1 \equiv r\delta_r A + t\delta_t B + s\delta_s C$$

$$Z_2 \equiv t\delta_t A + s\delta_s B + r\delta_r C$$

$$Z_3 \equiv s\delta_s A + r\delta_r B + t\delta_t C$$

Hat man nun die Punkte G_m im Auge, so ist in diesen Formeln zu setzen

$$r = a^m, \quad s = b^m, \quad t = c^m$$

Für $p = 0$ wird demnach

$$Z_1 \equiv \frac{1}{b^m} A + \frac{1}{a^m} B + \frac{1}{c^m} C \equiv C_{-m}$$

$$Z_2 \equiv \frac{1}{a^m} A + \frac{1}{c^m} B + \frac{1}{b^m} C \equiv A_{-m}$$

$$Z_3 \equiv \frac{1}{c^m} A + \frac{1}{b^m} B + \frac{1}{a^m} C \equiv B_{-m}$$

Diese Punkte stehen also zu den Punkten G_{-m} in demselben Verhältniss, wie die Punkte A_m etc. zu den Punkten G_m .

Für $q = 0$ ergeben sich natürlich dieselben Punkte, nur in anderer Reihenfolge.

Für $p + q = 0$ muss man selbstverständlich auf die Punkte A_m , B_m , C_m stossen.

Für $p = q$ wird

$$Z_1 \equiv a^m \delta_a A + c^m \delta_c B + b^m \delta_b C$$

$$Z_2 \equiv c^m \delta_c A + b^m \delta_b B + a^m \delta_a C$$

$$Z_3 \equiv b^m \delta_b A + a^m \delta_a B + c^m \delta_c C$$

Diese Punkte verhalten sich also in Bezug auf die Punkte M_m genau so wie die Punkte A_m , B_m , C_m zu den Punkten G_m , es muss also beispielsweise die durch Z_1 und M_{m1} gezogene Gerade parallel sein zu BC .

Für die Punkte G_{-m} , O_m und O_m' , für welche

$$r = \frac{1}{a^m}, \quad s = \frac{1}{b^m}, \quad t = \frac{1}{c^m}$$

ist, erhält man für $p = 0$ und $q = 0$ die Punkte A_m , B_m , C_m , für $p + q = 0$ die Punkte A_{-m} , B_{-m} , C_{-m} . Für $p = q$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{a^m} \vartheta_a A + \frac{1}{c^m} \vartheta_c B + \frac{1}{b^m} \vartheta_b C$$

$$Z_2 \equiv \frac{1}{c^m} \vartheta_c A + \frac{1}{b^m} \vartheta_b B + \frac{1}{a^m} \vartheta_a C$$

$$Z_3 \equiv \frac{1}{b^m} \vartheta_b A + \frac{1}{a^m} \vartheta_a B + \frac{1}{c^m} \vartheta_c C$$

falls man zur Abkürzung setzt

$$\begin{aligned} \vartheta_a &= a^m b^m + a^m c^m - b^m c^m, & \vartheta_b &= a^m b^m + b^m c^m - a^m c^m \\ \vartheta_c &= a^m c^m + b^m c^m - a^m b^m \end{aligned}$$

Für die Punkte S_m ist

$$r = a^m(b^m + c^m), \quad s = b^m(a^m + c^m), \quad t = c^m(a^m + b^m)$$

Setzt man diese Werte in die Ausdrücke für Z ein, so erhält man für $p = 0$ und $q = 0$

$$Z_1 \equiv \frac{1}{b^m(a^m + c^m)} A + \frac{1}{a^m(b^m + c^m)} B + \frac{1}{c^m(a^m + b^m)} C$$

Man erhält also die drei Punkte, welche zu den reciproken Punkten der S_m in demselben Verhältniss stehen, wie die A_m zu den G_m , wenn man unter reciproken Punkten solche mit reciproken Coordinaten versteht. Für $p = q$ wird

$$Z_1 \equiv (b^m + c^m) A + (a^m + b^m) B + (a^m + c^m) C$$

Dieser Punkt stellt nun die Mitte der Seite $B_m C_m$ dar, so dass also unter Berücksichtigung der drei Punkte Z sich ergibt, dass, wenn man die drei Seitenmitten des Coordinatendreiecks mit irgend einer der Mitten der Seiten des Dreiecks $G_m O_m O_m'$ verbindet, jede dieser neun Geraden auch durch eine der Seitenmitten des Dreiecks $A_m B_m C_m$ geht. Für $p + q = 0$ ergeben sich auch hier wieder die Punkte, welche zu den S_m in der nämlichen Beziehung stehen, wie die A_m, B_m, C_m zu den G_m .

Für die Punkte S_m' ist

$$r = \frac{1}{b^m + c^m}, \quad s = \frac{1}{a^m + c^m}, \quad t = \frac{1}{a^m + b^m}$$

Es wird also für $p = 0$

$$Z_1 \equiv (a^m + c^m) A + (b^m + c^m) B + (a^m + b^m) C$$

Die Verbindungslinien von S_{m1}' mit C, A und B gehen also durch die Punkte A_m', B_m', C_m' , ähnliches gilt von den Punkten S_{m2}' und S_{m3}' .

Für $p = q$ wird

$$Z_1 = \frac{1}{b^m + c^m} (b^{2m} + c^{2m} - a^{2m} + a^m b^m + a^m c^m + b^m c^m) A$$

$$+ \frac{1}{a^m + b^m} (a^{2m} + b^{2m} - c^{2m} + a^m b^m + b^m c^m + a^m c^m) B$$

$$+ \frac{1}{a^m + c^m} (a^{2m} + c^{2m} - b^{2m} + a^m b^m + a^m c^m + b^m c^m) C$$

Für $p + q = 0$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{b^m + c^m} A + \frac{1}{a^m + b^m} B + \frac{1}{a^m + c^m} C$$

Dies ist aber der zu A_m' reciproke Punkt. Zieht man also durch die Punkte S_m' Parallelen zu den Seiten des Dreiecks ABC , so schneiden sich je drei zusammengehörige derselben in einem Punkte. Wird nun ein solcher Punkt z. B. Z_1 und der zu ihm reciproke A_m' mit den drei Ecken des Dreiecks ABC verbunden, so treffen diese Verbindungslinien die Gegenseiten in Punkten, welche von den Seitenmitten gleichweit abstehen.

Für die Punkte M_m ist

$$r = a^m \delta_a, \quad s = b^m \delta_b, \quad t = c^m \delta_c$$

Für $p = 0$ wird mithin

$$Z_1 \equiv \frac{1}{b^m \delta_b} A + \frac{1}{a^m \delta_a} B + \frac{1}{c^m \delta_c} C$$

Diese Punkte stehen zu den reciproken Punkten von M_m in derselben Beziehung wie die A_m zu den G_m .

Für $p = q$ wird nach vorgenommener Reduction

$$Z_1 \equiv a^m A + c^m B + b^m C$$

was nach früher Gesagtem zu erwarten stand.

Für $p + q = 0$ wird

$$Z_1 \equiv a^m \delta_a A + c^m \delta_c B + b^m \delta_b C$$

d. h. man erhält die Punkte, welche zu den M_m in derselben Beziehung stehen, wie die Punkte A_m etc. zu den G_m .

Für die Punkte M_m' ist

$$r = \frac{1}{\delta_a}, \quad s = \frac{1}{\delta_b}, \quad t = \frac{1}{\delta_c}$$

Für $p = 0$ wird also

$$Z_1 = \delta_a A + \delta_c B + \delta_b C$$

Diese Punkte stehen also zu den reciproken Punkten der M_m' in demselben Verhältniss wie die A_m etc. zu den G_m .

Für $p = q$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{\delta_a} \left(\frac{1}{\delta_b} + \frac{1}{\delta_c} - \frac{1}{\delta_a} \right) A + \frac{1}{\delta_c} \left(\frac{1}{\delta_a} + \frac{1}{\delta_b} - \frac{1}{\delta_c} \right) B \\ + \frac{1}{\delta_b} \left(\frac{1}{\delta_a} + \frac{1}{\delta_b} - \frac{1}{\delta_c} \right) C$$

Für $p + q = 0$ endlich erhält man jene Punkte, welche zu den M_m' in derselben Beziehung stehen, wie die A_m zu den G_m .

Bilden wir des weiteren von drei Punkten, deren Coordinaten durch die Grössen r, s, t bestimmt sind, ausgehend, die Kegelschnitte H_β , so sind die Punkte auf drei zusammengehörigen Hyperbeln durch die Ausdrücke gegeben:

$$Z_1 \equiv \frac{1}{ps + qt} A + \frac{1}{pr + qs} B + \frac{1}{pt + qr} C$$

$$Z_2 \equiv \frac{1}{pr + qs} A + \frac{1}{pt + qr} B + \frac{1}{ps + qt} C$$

$$Z_3 \equiv \frac{1}{ps + qr} A + \frac{1}{ps + qt} B + \frac{1}{pr + qs} C$$

Für $p = 0$ und $q = 0$ führen diese Ausdrücke, wie es sein muss, auf Punkte, welche oben schon aufgeführt sind. Es sollen also nur die Fälle $p = q$ und $p + q = 0$ weiter berücksichtigt werden.

Im ersten Falle wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{s + t} A + \frac{1}{r + s} B + \frac{1}{t + r} C$$

$$Z_2 \equiv \frac{1}{r + s} A + \frac{1}{t + r} B + \frac{1}{r + t} C$$

$$Z_3 \equiv \frac{1}{t + r} A + \frac{1}{s + t} B + \frac{1}{r + s} C$$

Im zweiten Falle ist

$$Z_1 \equiv \frac{1}{s - t} A + \frac{1}{r - s} B + \frac{1}{t - r} C$$

$$Z_2 \equiv \frac{1}{r - s} A + \frac{1}{t - r} B + \frac{1}{s - t} C$$

$$Z_3 \equiv \frac{1}{t - r} A + \frac{1}{s - t} B + \frac{1}{r - s} C$$

Verbinden wir nun die Mitten der G_m mit den Punkten A, B, C , so wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{b^m + c^m} A + \frac{1}{a^m + b^m} B + \frac{1}{c^m + a^m} C$$

Diese Punkte stehen zu den S_m' in demselben Verhältniss, wie die A_m etc. zu den G_m und sind reciprok zu den Punkten A_m', B_m', C_m' .

Zieht man ferner durch die Punkte A, B, C die Parallelen zu den G_m , so wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{b^m - c^m} A + \frac{1}{a^m - b^m} B + \frac{1}{c^m - a^m} C$$

Diese Punkte stehen zu den P_m , welche auf H_β und zugleich auf den dem Coordinatendreieck umschriebenen Kegelschnitten mit den Mittelpunkten M_m liegen, in demselben Verhältniss, wie die A_m etc. zu den G_m .

Für die Punkte G_{-m} , O_m , O_m' und $p = q$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{a^m(b^m + c^m)} A + \frac{1}{c^m(a^m + b^m)} B + \frac{1}{b^m(a^m + c^m)} C$$

Diese Punkte stehen zu den reciproken Punkten der S_m in derselben Beziehung wie die A_m etc. zu den G_m .

Für die G_{-m} etc. und $p + q = 0$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{a^m(c^m - b^m)} A + \frac{1}{c^m(b^m - a^m)} B + \frac{1}{b^m(a^m - c^m)} C$$

Für die Punkte S_m und $p = q$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{a^m(b^m + c^m) + 2b^m c^m} A + \frac{1}{c^m(a^m + b^m) + 2a^m b^m} B \\ + \frac{1}{b^m(a^m + c^m) + 2a^m c^m} C$$

Für $p + q = 0$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{a^m(b^m - c^m)} A + \frac{1}{c^m(a^m - b^m)} B + \frac{1}{b^m(c^m - a^m)} C$$

Für die Punkte S_m' und $p = q$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{(b^m + c^m)(2a^m + b^m + c^m)} A + \frac{1}{(a^m + b^m)(2c^m + a^m + b^m)} B \\ + \frac{1}{(a^m + c^m)(2b^m + a^m + c^m)} C$$

Für $p + q = 0$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{b^{2m} - c^{2m}} A + \frac{1}{a^{2m} - b^{2m}} B + \frac{1}{c^{2m} - a^{2m}} C$$

Für die Punkte M_m und $p = q$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{b^m \delta_b + c^m \delta_c} A + \frac{1}{a^m \delta_a + b^m \delta_b} B + \frac{1}{c^m \delta_c + a^m \delta_a} C$$

Für $p + q = 0$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{(b^m - c^m) \delta_a} A + \frac{1}{(a^m - b^m) \delta_c} B + \frac{1}{(c^m - a^m) \delta_b} C$$

Für die Punkte M'_m und $p = q$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{a^m \delta_a} A + \frac{1}{c^m \delta_c} B + \frac{1}{b^m \delta_b} C$$

Für $p + q = 0$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{(b^m - c^m) \delta_a} A + \frac{1}{(a^m - b^m) \delta_c} B + \frac{1}{(c^m - a^m) \delta_b} C$$

Der eben gefundene Punkt stimmt mit demjenigen überein, welchen wir bei den Punkten M_m für $p + q = 0$ erhalten haben, mithin müssen die Geraden, welche man durch die Eckpunkte des Dreiecks ABC parallel zu den Geraden M_{m1} , M_{m2} etc. zieht, identisch sein mit denjenigen, welche durch dieselben Eckpunkte gehen und parallel zu den Geraden M_{m1}' , M_{m2}' etc. sind, d. h. die durch die Punkte M_m gezogenen Geraden sind parallel zu denjenigen, welche die Punkte M'_m verbinden.

Von den Punkten endlich, welche man erhält, wenn man zu den Punkten Y mit den Coordinaten r , s , t die Hyperbeln H_Y bildet, sollen nur noch einige, welche zu bereits erwähnten Punkten oder Linien in Beziehung stehen, hervorgehoben werden. Denkt man sich zunächst A' mit Y' etc. verbunden, so erhält man für den Schnittpunkt

$$Z_1 \equiv \frac{1}{2qr + p\Sigma} A + \frac{1}{2qt + p\Sigma} B + \frac{1}{2qs + p\Sigma} C$$

Im Falle $p + q = 0$ wird daraus

$$Z_1 = \frac{1}{\delta_r} A + \frac{1}{\delta_t} B + \frac{1}{\delta_s} C$$

Treten nun die Punkte G_m an die Stelle der Y , so erhält man

im gegebenen Falle diejenigen Punkte, welche zu dem M_m' in derselben Beziehung stehen, wie die A_m etc. zu den G_m .

Für die Punkte S_m erhält man nach vorgenommener Reduction

$$Z_1 \equiv a^m A + c^m B + b^m C$$

Dies ist aber der Punkt A_m , so dass also die durch ABC zu den Geraden $A'S_{m1}$, $B'S_{m2}$, $C'R_{m3}$ gezogenen Parallelen sich in A_m schneiden und also auch

$$\text{ferner} \quad A'S_{m1} \parallel AA_m, \quad B'S_{m1} \parallel BB_m, \quad C'S_{m1} \parallel CC_m$$

$$\text{endlich} \quad A'S_{m2} \parallel AC_m, \quad B'S_{m2} \parallel BA_m, \quad C'S_{m2} \parallel CB_m$$

$$A'S_{m3} \parallel AB_m, \quad B'S_{m3} \parallel BC_m \quad \text{und} \quad C'S_{m3} \parallel CA_m \quad \text{ist.}$$

Für die Punkte M_m wird nach vorgenommener Reduction

$$Z_1 \equiv \delta_a A + \delta_c B + \delta_b C$$

Dies sind die reciproken Punkte zu denjenigen, welche wir für die Punkte G_m im eben behandelten Falle erhielten.

Setzt man in der oben angegebenen allgemeinen Formel für Z

$$p + 2q = 0$$

so wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{s+t} A + \frac{1}{r+s} B + \frac{1}{r+t} C$$

Diese Formel stimmt nun mit derjenigen überein, welche oben für den allgemeinen Fall H_β für $p = q$ sich ergab. Verbindet man also die Mitten dreier beliebiger zusammengehöriger Punkte Y mit den Ecken des Coordinatendreiecks, so liegen auf diesen drei in einem Punkte sich schneidenden Geraden auch die Punkte, welche man erhält, wenn man die Y mit den entsprechenden Seitenmitten des Coordinatendreiecks verbindet und diese Strecken um ihre eigene Grösse über die Seitenmitten hinaus verlängert.

Denkt man sich des weitern die A' etc. mit den Y_1' etc. verbunden, wenn Y_1' etc. die Mitten der Strecken $Y_2 Y_3$ etc. bezeichnen, und die Teilpunkte dieser Strecken mit A , B , C verbunden, so wird der Schnittpunkt

$$Z_1 \equiv \frac{1}{p\Sigma + q(s+t)} A + \frac{1}{p\Sigma + q(r+s)} B + \frac{1}{p\Sigma + q(r+t)} C$$

Für $p + q = 0$ wird demnach

$$Z_1 \equiv \frac{1}{r} A + \frac{1}{t} B + \frac{1}{s} C$$

Für die Punkte G_m hat man also

$$Z_1 \equiv \frac{1}{a^m} A + \frac{1}{c^m} B + \frac{1}{b^m} C$$

Dies ist nun der Punkt A_{-m} und da man für Z_2 den Punkt B_{-m} , für Z_3 den Punkt C_{-m} erhält, so sieht man, dass von den Ecken des Dreiecks ABC neun Gerade auslaufen, von denen je drei in den Punkten A_{-m} , B_{-m} , C_{-m} sich schneiden. Zu diesen sind bzhw. parallel neun andere Gerade, von denen je drei durch eine Seitenmitte des Dreiecks ABC gehen und die sich zu je dreien in den Seitenmitten des Dreiecks $G_{m1} G_{m2} G_{m3}$ treffen. Man sieht ferner sofort, dass der eben ausgesprochene Satz für alle Punkte Y Geltung haben muss, wobei natürlich die A_{-m} mit den Y sich ändern.

Für die Punkte G_{-m} erhält man im vorwürfigen Falle

$$Z_1 \equiv a^m A + c^m B + b^m C$$

Da dieses der Punkt A_m ist, so ersieht man, dass in dem eben angeführten Satze die A_m etc. an die Stelle der A_{-m} treten, wenn man statt der G_m die G_{-m} in Betracht zieht.

Für die Punkte S_m ergibt sich

$$Z_1 \equiv \frac{1}{a^m(b^m + c^m)} A + \frac{1}{c^m(a^m + b^m)} B + \frac{1}{b^m(a^m + c^m)} C$$

ein Punkt, dessen Beziehung zu den reciproken Punkten der S schon mehrfach erwähnt wurde.

Für die Punkte S'_m wird

$$Z_2 = (b^m + c^m) A + (a^m + b^m) B + (a^m + c^m) C$$

Die Z stellen also in diesem Falle die Mitten der Seiten des Dreiecks $A_m B_m C_m$ vor.

Für die Punkte M_m und M'_m erhält man

$$Z_1 \equiv \frac{1}{a^m \delta_a} A + \frac{1}{c^m \delta_c} B + \frac{1}{b^m \delta_b} C$$

und

$$Z_1 \equiv \delta_a A + \delta_b B + \delta_c C$$

deren Beziehung zu den reciproken Punkten der M_m bzw. M_m' schon hervorgehoben wurde.

Da aus dem allgemeinen Ausdrucke von Z für $2p + 3q = 0$ sich ergibt

$$Z_1 = \frac{1}{3r + s + t} A + \frac{1}{3t + r + s} B + \frac{1}{3s + r + t} C$$

und da derselbe Ausdruck sich für $p = q$ aus dem allgemeinen Ausdruck

$$Z_1 \equiv \frac{1}{2qr + p\Sigma} A + \frac{1}{2qt + p\Sigma} B + \frac{1}{2qs + p\Sigma} C$$

welcher oben für die Schnittpunkte der Verbindungslinien der Ecken des Dreiecks ABC mit entsprechenden Teilpunkten auf $A'Y_1$ etc. gefunden wurde, übereinstimmt, so ersieht man, dass die früher (unter III.) im besonderen Falle an diese Erscheinung geknüpfte Erörterung ebenfalls allgemeine Geltung hat.

Zum Schlusse mögen noch einige Punkte hervorgehoben werden, welche erhalten werden, wenn man sich H_γ für den allgemeinen Fall in Bezug auf $A'B'C'$ gebildet denkt. Es werden zu dem Zwecke die Verbindungslinien AY_1 etc. geteilt und die Teilpunkte mit A' verbunden. Der Ausdruck für den Schnittpunkt solcher Verbindungslinien ist

$$Z_1 \equiv (p\Sigma + qr)(p\Sigma + q\delta_r) A + (p\Sigma + qt)(p\Sigma + q\delta_t) B \\ + (p\Sigma + qs)(p\Sigma + q\delta_s) C$$

Für $p + q = 0$ wird daraus

$$Z_1 \equiv r(s + t) A + t(r + s) B + s(r + t) C$$

Für G_m und G_{-m} erhält man demnach

$$Z_1 \equiv a^m(b^m + c^m) A + c^m(a^m + b^m) B + b^m(a^m + c^m) C$$

und

$$Z_1 \equiv (b^m + c^m) A + (a^m + b^m) B + (a^m + c^m) C$$

Ersteres ist der Punkt A_{-m}' , letzteres der Punkt A_m' .

Es gehen also die zu den neun Verbindungslinien der Ecken A, B, C mit den Punkten G_m bzw. G_{-m} durch die Punkte A', B', C' gezogenen Parallelen zu je dreien durch die Mitten der Geraden

$B_{-m}C_{-m}$ etc. bzw. B_mC_m etc. Der Vergleich der Coordinaten A_{-m} mit denen der S_m lässt, nebenbei bemerkt, erkennen, dass

$$A_{-m}'S_{m1} \parallel BC, \quad B_{-m}'S_{m1} \parallel CA, \quad C_{-m}'S_{m1} \parallel AB \text{ etc. ist.}$$

Für S_m' wird nach einigen Reductionen

$$Z_1 = (2a^m + b^m + c^m)A + (2c^m + b^m + a^m)B + (2b^m + a^m + c^m)C$$

Man erhält also hier als Werte der drei Z die Mitten der Geraden $B_m'C_m'$, $C_m'A_m'$, $A_m'B_m'$.

Für die Punkte M_m' endlich wird nach einigen Reductionen

$$Z_1 \equiv a^m A + c^m B + b^m C$$

Die Z stimmen also hier mit den Punkten A_m , B_m , C_m überein.

Müller, Andreas

Untersuchungen über den Brocard'schen Kreis und das verallgemeinerte
Brocard'sche Dreieck

1890

Math.p. 288 ls#Beibd.7

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11651344-0